

BUKU AJAR

MEKANIKA KEKUATAN MATERIAL

DISUSUN OLEH :

IR. AMRINSYAH, MM

STAF PENGAJAR FAKULTAS TEKNIK UMA



PROGRAM STUDI TEKNIK MESIN

FAKULTAS TEKNIK - UNIVERSITAS MEDAN AREA

2013

BUKU AJAR

MEKANIKA KEKUATAN MATERIAL

DISUSUN OLEH :
IR. AMRINSYAH, MM
STAF PENGAJAR FAKULTAS TEKNIK UMA



PROGRAM STUDI TEKNIK MESIN
FAKULTAS TEKNIK - UNIVERSITAS MEDAN AREA
2013

Kata Pengantar

Buku ajar Mekanika Kekuatan Material merupakan salah satu materi kurikulum semester 4 dan 5 di Program Studi Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Medan Area dan merupakan lanjutan dari mata kuliah Statika Struktur di semester 3.

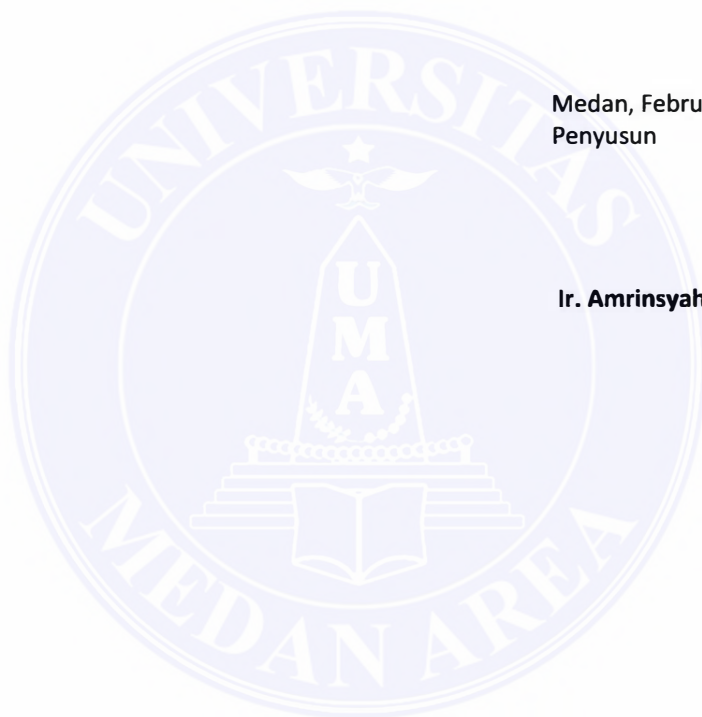
Buku ajar ini belum merupakan referensi lengkap dari mata kuliah Mekanika Kekuatan Material, sehingga mahasiswa perlu untuk membaca buku-buku referensi lainnya untuk melengkapi pengetahuannya tentang materi mata kuliah ini.

Dalam menyusun buku ajar ini masih banyak kekurangan dan kesalahan, untuk itu saran dan kritik diperlukan untuk perbaikan buku ajar ini di masa mendatang.

Akhir kata, mudah-mudahan buku ajar ini bisa menjadi penuntun bagi mahasiswa dan memberikan manfaat sebagaimana yang diharapkan. Tak lupa penyusun mengucapkan banyak-banyak terima-kasih kepada pihak-pihak yang telah banyak membantu dalam penyelesaian buku ajar ini.

Medan, Februari 2013
Penyusun

Ir. Amrinsyah, MM



Daftar Isi

1	Tegangan Dan Regangan Sederhana	9
1.1	Tegangan	9
1.2	Regangan	9
1.3	Hukum Hooke	10
1.4	Modulus Elastisitas (Modulus Young)	10
1.5	Deformasi Benda Karena Gaya Yang Bekerja	10
2	Konstanta Elastisitas	15
2.1	Regangan Primer atau Linier	15
2.2	Regangan Sekunder atau Lateral	16
2.3	Rasio Poisson	16
2.4	Regangan Volumetrik	17
2.4.1	Regangan Volumetrik Benda Persegi Empat Yang Mendapat Gaya Aksial	18
2.4.2	Regangan Volumetrik Benda Empat Persegi Panjang Yang Mendapat Tiga Gaya Yang Saling Tegak Lurus	20
2.5	Modulus Bulk	23
2.6	Hubungan Antara Modulus Bulk dengan Modulus Young	23
2.7	Tegangan Geser	24
2.8	Tegangan Geser Prinsipal	25
2.9	Modulus Geser atau Modulus Rigiditas	26
2.10	Hubungan Antara Modulus Elastisitas dan Modulus Rigiditas	27
3	Tegangan dan Regangan Prinsipal	31
3.1	Bidang Prinsipal	31
3.2	Tegangan Prinsipal	31
3.3	Metode Analitik Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Sebuah Benda	31
3.3.1	Tegangan Pada Bidang Miring Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang	32
3.3.2	Tegangan Pada Bidang Miring Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Arah Yang Saling Tegak Lurus	35
3.3.3	Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Geser Sederhana	37

3.3.4	Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang Disertai Dengan Tegangan Geser Sederhana	39
3.3.5	Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Bidang Yang Saling Tegak Lurus Disertai Dengan Tegangan Geser Sederhana	43
3.4	Metode Grafik Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Sebuah Benda	48
3.4.1	Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang	49
3.4.2	Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Arah Yang Saling Tegak Lurus	50
3.4.3	Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Sebuah Tegangan Langsung Pada Satu Bidang Disertai Dengan Sebuah Tegangan Geser	52
3.4.4	Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Dua Tegangan Langsung Pada Arah Yang Saling Tegak Lurus Disertai Dengan Sebuah Tegangan Geser	55
4	Defleksi Batang	61
4.1	Kurva Bending Batang	61
4.2	Hubungan Antara Kemiringan, Defleksi dan Jari-jari Kurva	63
4.3	Metode Untuk Kemiringan dan Defleksi Pada Penampang	64
4.4	Metode Integral Ganda Untuk kemiringan dan Defleksi	64
4.4.1	Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Di Tengah	65
4.4.2	Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Eksentrik	67
4.4.3	Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terdistribusi Merata	72
4.4.4	Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual	75
5	Defleksi Kantilever	79
5.1	Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Ujung Bebasnya	79
5.2	Kantilever Dengan Beban Terpusat Tidak Pada Ujung Bebasnya	81
5.3	Kantilever Dengan Beban Terdistribusi Merata	82
5.4	Kantilever Terbebani Sebagian Dengan Beban Terdistribusi Merata	85
5.5	Kantilever Dibebani Dari Ujung Bebas	86
5.6	Kantilever Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual	88
5.7	Kantilever Dengan Beberapa Beban	90
6	Defleksi Dengan Metode Momen Luas	93
6.1	Luas dan Posisi Pusat Gravitasi Parabola	93
6.2	Batang Tumpuan Sederhana dengan Beban Terpusat Di Tengah	94
6.3	Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Eksentrik	96
6.4	Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terdistribusi Merata	99
6.5	Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual	101

DAFTAR ISI

7

6.6	Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Ujung Bebasnya	104
6.7	Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Sembarang Titik	105
6.8	Kantilever Dengan Beban Terdistribusi Merata	107
6.9	Kantilever Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual	108





Bab 1

Tegangan Dan Regangan Sederhana

1.1 Tegangan

Setiap material adalah elastis pada keadaan alaminya. Karena itu jika gaya luar bekerja pada benda, maka benda tersebut akan mengalami deformasi. Ketika benda tersebut mengalami deformasi, molekulnya akan membentuk tahanan terhadap deformasi. Tahanan ini per satuan luas dikenal dengan istilah tegangan. Secara matematik tegangan bisa didefinisikan sebagai gaya per satuan luas, atau:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

dimana P = beban atau gaya yang bekerja pada benda
 A = Luas penampang melintang benda

Pada sistem SI, satuan tegangan adalah pascal (Pa) yang sama dengan 1 N/m^2 .

1.2 Regangan

Deformasi per satuan panjang disebut dengan *regangan*. Secara matematis ditulis:

$$\varepsilon = \frac{\delta l}{l}$$

atau

$$\delta l = \varepsilon \cdot l$$

dimana δl = Perubahan panjang benda
 l = Panjang awal benda

1.3 Hukum Hooke

Berbunyi, “Jika benda dibebani dalam batas elastisnya, maka tegangan berbanding lurus dengan regangannya”. Secara matematis ditulis:

$$\frac{\text{Tegangan}}{\text{Regangan}} = E = \text{konstan}$$

1.4 Modulus Elastisitas (Modulus Young)

Tegangan berbanding lurus dengan regangan, dalam daerah elastisnya, atau:

$$\sigma \propto \varepsilon$$

$$= E \times \varepsilon$$

atau

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

dimana

σ = tegangan

ε = regangan, dan

E = konstanta proporsionalitas atau disebut juga modulus elastisitas atau modulus Young.

Tabel 1.1: Harga E (modulus elastisitas) dari berbagai material.

No.	Material	Modulus Elastisitas (E) dalam GPa
1.	Baja	200 – 220
2.	Besi tempa	190 – 200
3.	Besi cor	100 – 160
4.	Tembaga	90 – 110
5.	Perunggu	80 – 90
6.	Aluminium	60 – 80
7.	Timbal	10

1.5 Deformasi Benda Karena Gaya Yang Bekerja

Misalkan sebuah benda mendapat tegangan tarik.

Misalkan P = Beban atau gaya yang bekerja pada benda
 l = Panjang benda
 A = Luas penampang benda
 σ = Tegangan yang timbul pada benda
 E = Modulus Elastisitas material benda
 ε = Regangan
 δl = Deformasi benda

Kita tahu bahwa tegangan:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Maka regangan:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

dan deformasi:

$$\delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma \cdot l}{E} = \frac{Pl}{AE}$$

Catatan:

1. Rumus di atas baik juga digunakan untuk tekanan
2. Untuk sebagian besar material, modulus elastisitas untuk kompresi sama dengan tarikan.
3. Kadang-kadang dalam perhitungan, tegangan dan regangan tarik diberi tanda positif, dan tegangan dan regangan tekan/kompresi diberi tanda negatif.

Contoh soal 1.1. Sebuah batang dari baja dengan panjang 1 m dan penampang 20 mm \times 20 mm mendapat gaya tarik sebesar 40 kN. Carilah perpanjangan batang, jika modulus elastisitas material batang adalah 200 GPa.

Jawab.

Diketahui: panjang (l) = 1 m = 1×10^3 mm
 luas penampang (A) = 20 \times 20 = 400 mm²
 gaya tarik (P) = 40 kN = 40×10^3 N
 Modulus elastisitas (E) = 200 GPa = 200×10^3 N/mm²

Perpanjangan batang:

$$\delta l = \frac{Pl}{A.E} = \frac{(40 \times 10^3) \times (1 \times 10^3)}{400 \times (200 \times 10^3)} = 0,5 \text{ mm}$$

Contoh Soal 1.2. Silinder berlobang dengan panjang 2 m mempunyai diameter luar 50 mm dan diameter dalam 30 mm. Jika silinder memikul beban sebesar 25 kN, carilah tegangan pada silinder. Cari juga deformasi yang terjadi pada silinder jika harga modulus elastisitas material silinder adalah 100 GPa.

Jawab.

Diketahui: panjang (l) = 2 m = 2×10^3 mm
diameter luar (D) = 50 mm
diameter dalam (d) = 30 mm
beban (P) = 25 kN = 25×10^3 N/mm²
modulus elastisitas (E) = 100 GPa = 100×10^3 N/mm²

Tegangan Pada Silinder

$$A = \frac{\pi}{4} \times (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \times [(50)^2 - (30)^2] = 1257 \text{ mm}^2$$

dan tegangan pada silinder:

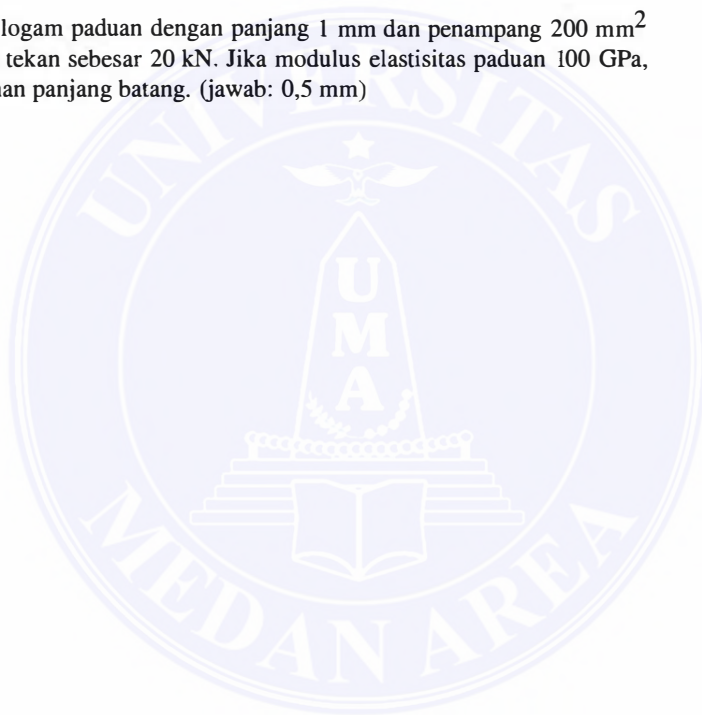
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{25 \times 10^3}{1257} = 19,9 \text{ N/mm}^2 = 19,9 \text{ MPa}$$

Deformasi pada silinder

$$\delta l = \frac{P.l}{A.E} = \frac{(25 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)}{1257 \times (100 \times 10^3)} = 0,4 \text{ mm}$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah batang baja dengan panjang 2 m dan penampang 150 mm^2 mendapat tarikan aksial sebesar 15 kN. Carilah perpanjangan/elongasi batang. Ambil harga $E = 200 \text{ GPa}$. (jawab: 1,0 mm)
2. Sebuah batang lurus mempunyai panjang 500 mm dan penampang 500 mm^2 . Carilah besar beban kompresi dimana panjangnya berkurang 0,2 mm. Ambil E material 200 GPa. (jawab: 40 kN)
3. Sebuah batang logam paduan dengan panjang 1 mm dan penampang 200 mm^2 mendapat gaya tekan sebesar 20 kN. Jika modulus elastisitas paduan 100 GPa, carilah penurunan panjang batang. (jawab: 0,5 mm)





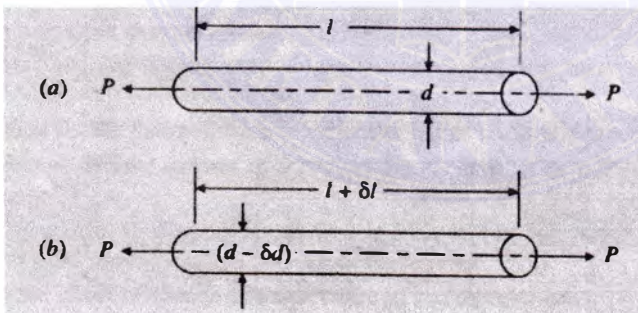
Bab 2

Konstanta Elastisitas

Dari eksperimen ditemukan bahwa regangan aksial yang terjadi pada sebuah benda selalu diikuti regangan dengan tanda yang berlawanan pada bagian lain yang tegak lurus terhadapnya. Secara umum, terdapat dua jenis regangan pada benda jika benda tersebut mengalami tegangan:

1. Regangan primer atau linier.
2. Regangan sekunder atau lateral.

2.1 Regangan Primer atau Linier



Gambar 2.1: Regangan linier dan lateral

Misalkan sebuah batang mengalami gaya tarik, seperti ditunjukkan oleh gambar 2.1(a).

- Jika
- l = Panjang batang
 - d = Diameter batang
 - P = Gaya tarik yang bekerja pada batang
 - δl = Peningkatan panjang batang karena gaya tarik.

Deformasi batang per satuan panjang pada arah gaya, yaitu, δ/l di kenal dengan *regangan primer* atau *linier*.

2.2 Regangan Sekunder atau Lateral

Ketika sebuah batang mengalami pertambahan panjang sebesar δl searah gaya tarik yang bekerja padanya, pada saat yang bersamaan terjadi penurunan diameter dari d ke $(d - \delta d)$, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.1(b). Dengan cara yang sama, jika batang mendapat gaya tekan, panjang batang akan menurun sebesar δl yang diikuti oleh peningkatan diameter dari d ke $(d + \delta d)$.

Jadi jelas bahwa setiap tegangan langsung selalu diikuti oleh regangan pada arah tegangan dan regangan dengan tanda yang berlawanan pada arah yang tegak lurus terhadap tegangan tersebut. Regangan yang tegak lurus terhadap tegangan yang bekerja ini disebut dengan *regangan sekunder* atau *lateral*.

2.3 Rasio Poisson

Dari eksperimen ditemukan bahwa jika sebuah benda mengalami tegangan pada daerah elastisnya, regangan lateral mempunyai rasio konstan terhadap regangan linier. Secara matematik:

$$\frac{\text{regangan lateral}}{\text{regangan linier}} = \text{konstan}$$

Konstanta ini dikenal dengan **Rasio Poisson**, dan dilambangkan dengan $1/m$ atau μ . Secara matematik:

$$\text{regangan lateral} = \frac{1}{m} \cdot \varepsilon = \mu \cdot \varepsilon$$

Tabel 2.1: Harga rasio Poisson dari berbagai material.

No.	Material	Rasio poisson, μ
1.	Baja	0,25 – 0,33
2.	Besi tuang	0,23 – 0,27
3.	Tembaga	0,31 – 0,34
4.	Perunggu	0,32 – 0,42
5.	Aluminium	0,32 – 0,36
6.	Beton	0,08 – 0,18
7.	Karet	0,45 – 0,50

Contoh soal 2.1. Sebuah batang yang terbuat dari baja dengan panjang 2 m, lebar 40 mm dan tebal 20 mm mendapat tarikan searah aksial sebesar 160 kN pada arah panjangnya. Carilah perubahan panjang, lebar dan ketebalan batang. Diketahui $E = 200$ GPa dan rasio Poisson = 0,3.

Jawab.

Diketahui: $l = 2 \text{ m} = 2 \times 10^3 \text{ mm}$
 $b = 40 \text{ mm}$
 $t = 20 \text{ mm}$
 $P = 160 \text{ kN} = 160 \times 10^3 \text{ N}$
 $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
 rasio Poisson, $1/m = 0,3$

Perubahan panjang:

$$\delta l = \frac{Pl}{AE} = \frac{(160 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)}{(40 \times 20) \times (200 \times 10^3)} = 2 \text{ mm}$$

Perubahan lebar:

$$\varepsilon = \frac{\delta l}{l} = \frac{2}{(2 \times 10^3)} = 0,001$$

dan regangan lateral:

$$= \frac{1}{m} \times \varepsilon = 0,3 \times 0,001 = 0,0003$$

Jadi perubahan lebar:

$$\delta b = b \times \text{regangan lateral} = 40 \times 0,0003 = 0,012 \text{ mm}$$

Perubahan ketebalan:

$$\delta t = t \times \text{regangan lateral} = 20 \times 0,0003 = 0,006 \text{ mm}$$

2.4 Regangan Volumetrik

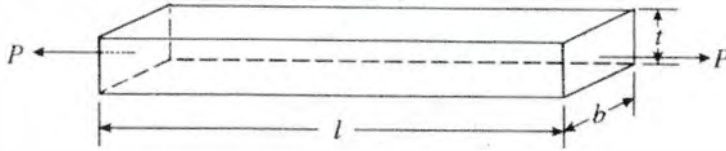
Jika sebuah benda mendapatkan gaya, maka benda tersebut akan mengalami perubahan dimensi. Perubahan dimensi sebuah benda akan menyebabkan perubahan volumenya. Rasio perubahan volume terhadap volume awal disebut dengan *regangan volumetrik*. Secara matematik, regangan volumetrik:

$$\varepsilon_V = \frac{\delta V}{V}$$

dimana: $\delta V =$ Perubahan volume
 $V =$ Volume awal.

Walaupun ada berbagai cara gaya bekerja pada benda, kondisi berikut perlu untuk mengetahui regangan volumetrik pada suatu benda:

1. Benda persegi empat mendapat sebuah gaya aksial.
2. Benda persegi empat mendapat tiga gaya yang saling tegak lurus.



Gambar 2.2: Regangan Volumetrik.

2.4.1 Regangan Volumetrik Benda Persegi Empat Yang Mendapat Gaya Aksial

Misalkan sebuah batang dengan penampang persegi panjang, mendapat gaya tarik aksial, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.2.

Misalkan P = Beban atau gaya tarik yang bekerja pada benda
 l = Panjang benda
 b = Lebar batang
 t = Tebal batang
 E = Modulus Elastisitas
 $1/m$ = Rasio Poisson

Kita tahu bahwa perubahan panjang:

$$\delta l = \frac{Pl}{AE} = \frac{Pl}{btE} \quad (2.1)$$

dan tegangan linier:

$$\sigma = \frac{\text{Gaya}}{\text{Luas}} = \frac{P}{b.t}$$

sehingga:

$$\text{regangan linier} = \frac{\text{tegangan}}{E} = \frac{P}{btE}$$

dan regangan lateral:

$$= \frac{1}{m} \times \text{regangan linier} = \frac{1}{m} \times \frac{P}{btE}$$

maka perubahan ketebalan:

$$\delta t = t \times \frac{1}{m} \times \frac{P}{btE} = \frac{P}{mbE}$$

dan perubahan lebar:

$$\delta b = b \times \frac{1}{m} \times \frac{P}{btE} = \frac{P}{mtE}$$

Sebagai hasil dari gaya tarik ini, misal panjang akhir:

$$= l + \delta l$$

lebar akhir (tanda negatif karena kompresi):

$$= b - \delta b$$

dan panjang akhir (tanda negatif karena kompresi):

$$= t - \delta t$$

Kita tahu bahwa volume awal benda:

$$V = l \cdot b \cdot t$$

dan volume akhir:

$$\begin{aligned} V &= (l + \delta l)(b - \delta b)(t - \delta t) \\ &= lbt \left(1 + \frac{\delta l}{l}\right) \left(1 - \frac{\delta b}{b}\right) \left(1 - \frac{\delta t}{t}\right) \\ &= lbt \left[1 + \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta t}{t} - \left(\frac{\delta l}{l} \times \frac{\delta b}{b}\right) - \left(\frac{\delta l}{l} \times \frac{\delta t}{t}\right) + \left(\frac{\delta l}{l} \times \frac{\delta b}{b} \times \frac{\delta t}{t}\right)\right] \end{aligned}$$

Dengan mengabaikan variabel-variabel yang nilainya kecil, maka:

$$V = lbt \left(1 + \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta t}{t}\right)$$

Perubahan volume:

$$\begin{aligned} \delta V &= \text{Volume akhir} - \text{Volume awal} \\ &= lbt \left[1 + \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta t}{t}\right] - lbt \\ &= lbt \left[\frac{\delta l}{l} - \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta t}{t}\right] \\ &= lbt \left[\frac{Pl}{btE} - \frac{P}{btE} - \frac{P}{mtE}\right] = lbt \left[\frac{P}{btE} - \frac{P}{mbtE} - \frac{P}{mbtE}\right] \\ &= V \times \frac{P}{btE} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \end{aligned}$$

dan regangan volumetrik:

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{V} &= \frac{V \times \frac{P}{btE} \left(1 - \frac{2}{m}\right)}{V} = \frac{P}{btE} \left(1 - \frac{2}{m}\right) \\ &= \epsilon \left(1 - \frac{2}{m}\right) \end{aligned}$$

Catatan: Rumus di atas berlaku juga untuk gaya tekan.

Contoh soal 2.2. Sebuah batang yang terbuat dari baja dengan panjang 2 m, lebar 20 mm dan tebal 15 mm mendapat beban tarik sebesar 30 kN. Carilah peningkatan volume, jika rasio Poisson = 0,25 dan modulus Young = 200 GPa.

Jawab.

Diketahui: $l = 2 \text{ m} = 2 \times 10^3 \text{ mm}$

$b = 20 \text{ mm}$

$t = 15 \text{ mm}$

$P = 30 \text{ kN} = 30 \times 10^3 \text{ N}$

rasio Poisson, $1/m = 0,25$

modulus Young, $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$

Volume awal batang:

$$V = l.b.t = (2 \times 10^3) \times 20 \times 15 = 600 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

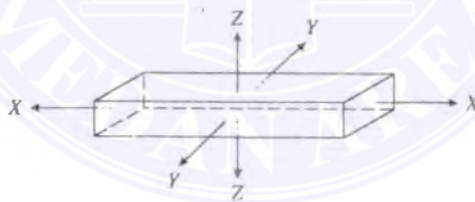
$$\frac{\delta V}{V} = \frac{P}{btE} \left(1 - \frac{2}{m}\right) = \frac{30 \times 10^3}{20 \times 15 \times (200 \times 10^3)} \left(1 - \frac{2}{4}\right) = 0,00025$$

Jadi peningkatan volume:

$$\delta V = 0,00025 \times V = 0,00025 \times (600 \times 10^3) = 150 \text{ mm}^3$$

2.4.2 Regangan Volumetrik Benda Empat Persegi Panjang Yang Mendapat Tiga Gaya Yang Saling Tegak Lurus

Misalkan sebuah benda persegi empat mendapat tegangan langsung pada ketiga sumbunya yang saling tegak lurus, seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 2.3.



Gambar 2.3: Regangan Volumetrik.

Misalkan σ_x = Tegangan pada arah $x-x$

σ_y = Tegangan pada arah $y-y$

σ_z = Tegangan pada arah $z-z$

E = Modulus Young

Regangan pada arah $X-X$ karena tegangan σ_x ,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

dengan cara yang sama,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{dan} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

Regangan pada ketiga arah bisa dicari dengan prinsip superposisi, yaitu dengan menambahkan secara aljabar regangan di setiap arah karena setiap tegangan individu. Untuk ketiga tegangan tarik yang ditunjukkan oleh Gambar 2.3 (dengan memakai tanda positif sebagai regangan tarik dan negatif sebagai regangan tekan), regangan resultan pada arah x - x :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{mE} - \frac{\sigma_z}{mE} = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} - \frac{\sigma_z}{m} \right)$$

dengan cara yang sama

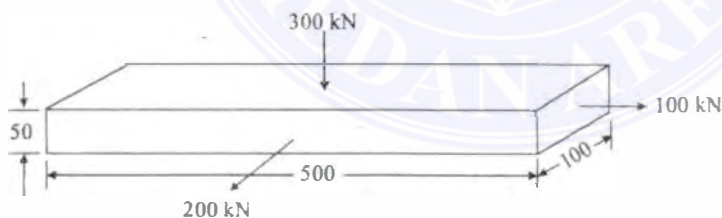
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_z}{mE} = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} - \frac{\sigma_z}{m} \right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{mE} = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x}{m} - \frac{\sigma_y}{m} \right)$$

Regangan volumetrik bisa dicari dengan:

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Contoh soal 2.3. Sebuah batang dengan panjang 500 mm dan penampang 100 mm \times 50 mm menerima gaya-gaya seperti gambar 2.4. Berapakah perubahan volume batang? Ambil modulus elastisitas untuk material batang 200 GPa dan rasio Poisson 0,25.



Gambar 2.4:

Jawab

Diketahui: $l = 500$ mm

$b = 100$ mm

$t = 50$ mm

Gaya pada arah $x = P_x = 100$ kN = 100×10^3 N (tarik)

Gaya pada arah $y = P_y = 200 \text{ kN} = 200 \times 10^3 \text{ N}$ (tarik)
 Gaya pada arah $z = P_z = 300 \text{ kN} = 300 \times 10^3 \text{ N}$ (tekan)
 $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
 rasio Poisson = $1/m = 0,25$ atau $m = 4$

Volume awal batang:

$$V = l \times b \times t = 500 \times 100 \times 50 = 2,5 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

dan tegangan pada arah $x-x$:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_x} = \frac{100 \times 10^3}{100 \times 50} = 20 \text{ N/mm}^2 \text{ (tarik)}$$

dengan cara yang sama:

$$\sigma_y = \frac{P_y}{A_y} = \frac{200 \times 10^3}{500 \times 50} = 8 \text{ N/mm}^2 \text{ (tarik)}$$

dan

$$\sigma_z = \frac{P_z}{A_z} = \frac{300 \times 10^3}{500 \times 100} = 6 \text{ N/mm}^2 \text{ (tekan)}$$

Kita juga tahu bahwa regangan resultan pada arah $x-x$, dengan mempertimbangkan tarikan adalah positif dan kompresi adalah negatif adalah:

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{mE} + \frac{\sigma_z}{mE} = +\frac{20}{E} - \frac{8}{4E} + \frac{6}{4E} = \frac{16,5}{E}$$

dengan cara yang sama:

$$\varepsilon_y = +\frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} + \frac{\sigma_z}{mE} = +\frac{8}{E} - \frac{20}{4E} + \frac{6}{4E} = \frac{4,5}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{mE} = -\frac{6}{E} - \frac{20}{4E} - \frac{8}{4E} = \frac{13}{E}$$

regangan volumetrik:

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\frac{\delta V}{2,5 \times 10^6} = \frac{16,5}{E} + \frac{4,5}{E} - \frac{13}{E} = \frac{8}{E} = \frac{8}{200 \times 10^3} = 0,04 \times 10^{-3}$$

$$\delta V = (0,04 \times 10^{-3}) \times (2,5 \times 10^6) = 100 \text{ mm}^3$$

2.5 Modulus Bulk

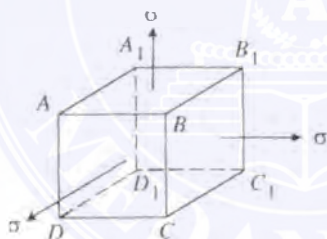
Jika sebuah benda mendapat tiga tegangan yang saling tegak lurus, dengan besaran yang sama, rasio tegangan langsung terhadap regangan volumetrik disebut sebagai modulus bulk, dilambangkan dengan K . Secara matematik:

$$K = \frac{\text{Tegangan Langsung}}{\text{Regangan Volumetrik}} = \frac{\sigma}{\frac{\delta V}{V}}$$

2.6 Hubungan Antara Modulus Bulk dengan Modulus Young

Misalkan sebuah kubus $ABCD A_1B_1C_1D_1$ seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.5. Katakan kubus mendapat tiga tegangan tarik yang saling tegak lurus dengan besaran yang sama.

Ambil σ = Tegangan pada permukaan
 l = Panjang kubus
 E = Modulus Young untuk material kubus



Gambar 2.5: Kubus $ABCD A_1B_1C_1D_1$

Misalkan deformasi pada satu sisi kubus (katakan AB) karena tiga tegangan tarik. Kita tahu bahwa sisi ini mengalami regangan-regangan berikut:

1. Tegangan tarik sebesar $\frac{\sigma}{E}$ karena tegangan pada permukaan $BB_1 CC_1$ dan $AA_1 DD_1$.
2. Regangan lateral tekan sebesar $\frac{1}{m} \times \frac{\sigma}{E}$ karena tegangan pada permukaan $AA_1 BB_1$ dan $DD_1 CC_1$.
3. Regangan lateral tekan sebesar $\frac{1}{m} \times \frac{\sigma}{E}$ karena tegangan pada permukaan $ABCD$ dan $A_1B_1C_1D_1$.

Sehingga, regangan tarik netto yang dialami oleh sisi AB karena tegangan-tegangan ini:

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\sigma}{El} - \left(\frac{1}{m} \times \frac{\sigma}{E} \right) - \left(\frac{1}{m} \times \frac{\sigma}{E} \right) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right) \quad (2.2)$$

Volume awal kubus: $V = l^3$ dan turunannya terhadap l adalah $\frac{\delta V}{V} = 3l^2$ atau:

$$\delta V = 3l^2 \cdot \delta l = 3l^3 \times \frac{\delta l}{l}$$

Substitusikan harga $\frac{\delta l}{l}$ dari persamaan 2.2:

$$\delta V = 3l^3 \times \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right)$$

atau

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{3l^3}{l^3} \times \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right) = \frac{3\sigma}{E} \left(1 - \frac{2}{m} \right)$$

sehingga

$$\frac{\sigma}{\frac{\delta V}{V}} = \frac{E}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{m} \right)} = \frac{E}{3} \frac{1}{\left(\frac{m-2}{m} \right)}$$

atau

$$K = \frac{mE}{3(m-2)}$$

Contoh soal 2.4. Jika harga modulus elastisitas dan rasio poisson sebuah paduan masing-masing adalah 150 GPa dan 0,25, carilah harga modulus bulk paduan tersebut.

Jawab

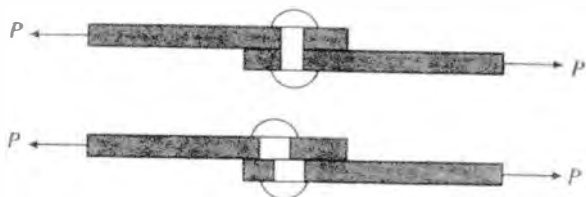
Diketahui: $E = 150 \text{ GP} = 150 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
rasio Poisson, $1/m = 0,25$ atau $m = 4$

Modulus bulk paduan:

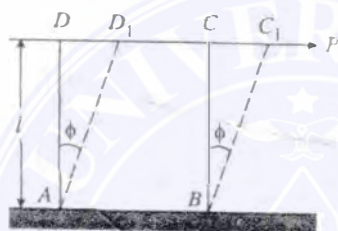
$$\begin{aligned} K &= \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{4 \times (150 \times 10^3)}{3(4-2)} = 100 \times 10^3 \text{ N/mm}^2 \\ &= 100 \text{ GPa} \end{aligned}$$

2.7 Tegangan Geser

Ketika suatu penampang mendapat dua gaya yang sama besar dan berlawanan arah, dan bekerja secara tangensial pada penampang tersebut, akibatnya benda tersebut cenderung robek melalui penampang tersebut seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.6, tegangan yang ditimbulkan disebut *tegangan geser*. Regangannya disebut *regangan geser*.



Gambar 2.6: Tegangan geser pada keling.



Gambar 2.7: Regangan geser.

Misalkan sebuah kubus dengan panjang l mempunyai tumpuan tetap pada permukaan dasar AB . Misalkan sebuah gaya P diberikan pada permukaan DC , tangensial terhadap permukaan AB . Karena gaya, misalkan kubus berubah dari $ABCE$ ke ABC_1D_1 melalui sudut ϕ seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 2.7.

$$\begin{aligned} \text{Regangan Geser} &= \frac{\text{Deformasi}}{\text{Panjang awal}} \\ &= \frac{CC_1}{l} = \phi \end{aligned}$$

dan tegangan geser:

$$\tau = \frac{P}{AB}$$

2.8 Tegangan Geser Prinsipal

Tegangan geser prinsipal adalah tegangan geser pada penampang sebuah bidang, dan selalu diikuti oleh tegangan geser penyeimbang (*balancing shear stress*) pada penampang bidang dan normal terhadapnya.

Bukti

Misalkan sebuah blok segiempat $ABCD$ mendapat tegangan geser τ pada permukaan AD dan CB seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.8. Misalkan ketebalan satu satuan. Maka gaya yang bekerja pada permukaan AD dan CB :

$$P = \tau \cdot AD = \tau \cdot CB$$



Gambar 2.8: Tegangan Geser Prinsipal

Dapat dilihat bahwa gaya-gaya ini membentuk sebuah kopel, dimana harga momennya adalah $\tau \cdot AB \times AB$ yaitu gaya \times jarak. Jika balok dalam keadaan setimbang, maka harus ada kopel penyeimbang yang besar momennya harus sama dengan besar momen ini. Misalkan tegangan geser τ' terdapat pada permukaan AB dan CD seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.8. Maka gaya-gaya yang bekerja pada permukaan AB dan CD :

$$P = \tau' \cdot AB = \tau' \cdot CD$$

Kita bisa melihat bahwa gaya-gaya ini juga membentuk kopel yang besar momennya sama dengan $\tau \cdot AB \times AB$. Dengan menyamakan kedua momen ini maka:

$$\tau \cdot AD \times AB = \tau' \cdot AD \times AB$$

atau:

$$\tau = \tau'$$

Sebagai akibat dari kedua kopel, diagonal BD balok akan mendapat gaya tarik, sedangkan diagonal AC mendapat gaya tekan.

Tegangan τ disebut regangan komplementer.

2.9 Modulus Geser atau Modulus Rigiditas

Secara eksperimen diperoleh bahwa di dalam batas elastik, tegangan geser proporsional (berbanding lurus) terhadap regangan geser. Secara matematik:

2.10. HUBUNGAN ANTARA MODULUS ELASTISITAS DAN MODULUS RIGIDITAS²⁷

$$\begin{aligned}\tau &\propto \phi \\ &= C \times \phi\end{aligned}$$

atau

$$\frac{\tau}{\phi} = C \text{ (atau } G \text{ atau } N)$$

dimana: τ = tegangan geser
 ϕ = regangan geser
 C = konstanta, dikenal sebagai modulus geser atau modulus rigiditas

Tabel 2.2: Harga modulus Rigiditas berbagai material.

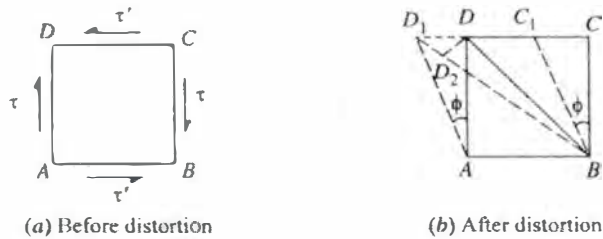
No.	Material	Modulus Rigiditas (C) dalam GPa atau kN/mm ²
1	Baja	80 – 100
2	Besi tempa	80 – 90
3	Besi cor	40 – 50
4	Tembaga	30 – 50
5	Kuningan	30 – 60
6	Timbal	10

2.10 Hubungan Antara Modulus Elastisitas dan Modulus Rigiditas

Misalkan sebuah kubus dengan panjang l mendapat tegangan geser τ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.9(a). Terlihat bahwa karena tegangan-tegangan tersebut, kubus mengalami distorsi, seperti diagonal BD akan bertambah panjang dan diagonal AC akan bertambah pendek. Misalkan tegangan geser τ akan menimbulkan regangan ϕ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 2.9(b). Terlihat bahwa diagonal BD akan mengalami distorsi menjadi BD' .

$$\begin{aligned}\text{regangan } BD &= \frac{BD_1 - BD}{BD} \\ &= \frac{D_1 D_2}{BD} = \frac{DD_1 \cos 45^\circ}{AD\sqrt{2}} = \frac{DD_1}{2AD} = \frac{\phi}{2}\end{aligned}$$

Kita lihat bahwa regangan linier diagonal BD adalah setengah dari regangan geser dan berupa tarik. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa diagonal AC adalah juga setengah dari regangan geser, tetapi berupa tekan. Regangan linier diagonal BD :



Gambar 2.9:

$$= \frac{\phi}{2} = \frac{\tau}{2C} \quad (2.3)$$

dimana: τ = regangan geser
 C = Modulus rigiditas

Misalkan tegangan geser ini bekerja pada sisi AB , CD , CB dan AD . Kita tahu bahwa akibat dari tegangan ini akan berupa tegangan tarik pada diagonal BD dan tegangan tekan pada diagonal AC . Maka regangan tarik pada diagonal BD karena tegangan tarik pada diagonal BD :

$$= \frac{\tau}{E} \quad (2.4)$$

dan regangan tarik pada diagonal BD karena tegangan tekan pada diagonal AC :

$$= \frac{1}{m} \times \frac{\tau}{E} \quad (2.5)$$

Efek kombinasi dari kedua tegangan di atas pada diagonal BD

$$= \frac{\tau}{E} + \frac{1}{m} \times \frac{\tau}{E} = \frac{\tau}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) = \frac{\tau}{E} \left(\frac{m+1}{m} \right) \quad (2.6)$$

Dengan menyamakan persamaan 2.3 dan 2.6:

$$\frac{\tau}{2C} = \frac{\tau}{E} \left(\frac{m+1}{m} \right) \text{ atau } C = \frac{mE}{2(m+1)}$$

Contoh soal 2.5. Sebuah spesimen paduan mempunyai modulus elastisitas 120 GPa dan modulus rigiditas 45 GPa. Carilah rasio Poisson material tersebut.

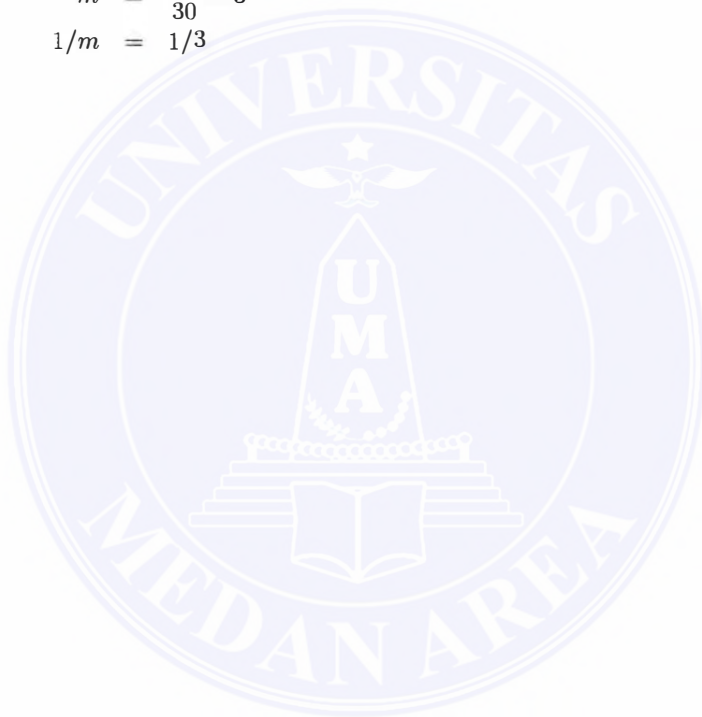
Jawab.

Diketahui: $E = 120$ GPa
 $C = 45$ GPa

2.10. HUBUNGAN ANTARA MODULUS ELASTISITAS DAN MODULUS RIGIDITAS²⁹

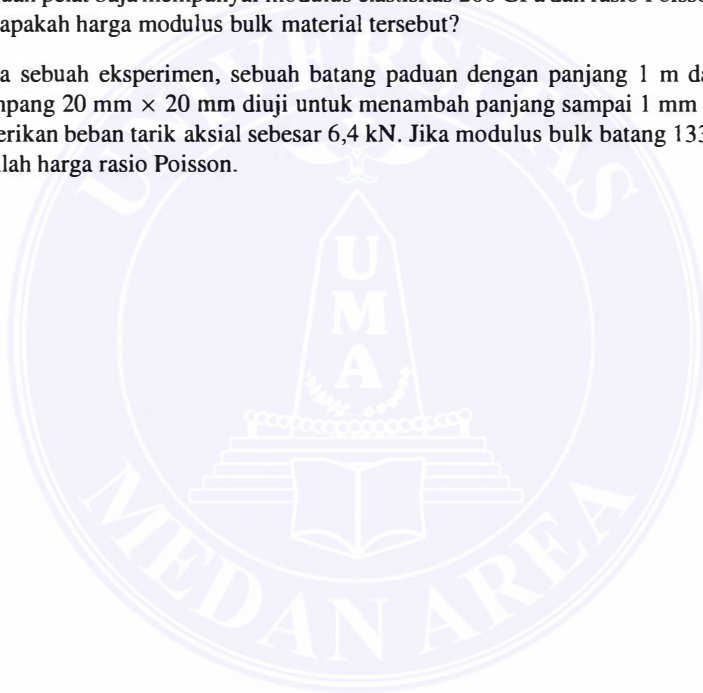
Modulus rigiditas:

$$\begin{aligned}C &= \frac{mE}{2(m+1)} \\45 &= \frac{m \times 120}{2(m+1)} = \frac{120m}{2m+2} \\90m+90 &= 120m \\m &= \frac{90}{30} = 3 \\1/m &= 1/3\end{aligned}$$



SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah batang baja dengan panjang 1,5 m dan diameter 20 mm mendapat tarikan aksial sebesar 100 kN. Carilah perubahan panjang dan diameter batang, jika $E = 200$ GPa dan $1/m = 0,32$
2. Carilah perubahan panjang, lebar dan tebal dari sebuah batang baja yang panjangnya 4 m, lebar 30 mm dan tebal 20 mm, jika mendapat tarikan aksial sebesar 120 kN pada arah panjangnya. Ambil $E = 200$ GPa dan rasio Poisson 0,3.
3. Sebuah pelat baja mempunyai modulus elastisitas 200 GPa dan rasio Poisson 0,3. Berapakah harga modulus bulk material tersebut?
4. Pada sebuah eksperimen, sebuah batang paduan dengan panjang 1 m dan penampang $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ diuji untuk menambah panjang sampai 1 mm ketika diberikan beban tarik aksial sebesar 6,4 kN. Jika modulus bulk batang 133 GPa, carilah harga rasio Poisson.



Bab 3

Tegangan dan Regangan Prinsipal

3.1 Bidang Prinsipal

Pada sebuah titik pada suatu benda terdapat 3 bidang yang saling tegak lurus satu sama lain dan hanya mendapat tegangan langsung, tidak terdapat tegangan geser. Dari ketiga tegangan langsung ini salah satunya akan mempunyai harga yang paling besar, satu mempunyai harga minimum, dan satu lagi mempunyai harga diantaranya. Ketiga bidang yang tidak mempunyai tegangan geser ini dikenal dengan *Bidang prinsipal*.

3.2 Tegangan Prinsipal

Besarnya tegangan langsung pada bidang prinsipal disebut dengan *tegangan prinsipal*. Penentuan bidang prinsipal, dan kemudian tegangan prinsipal merupakan faktor penting dalam desain berbagai struktur komponen mesin.

Pada pembahasan selanjutnya akan dibahas penentuan tegangan pada penampang miring sebuah benda yang mengalami regangan dengan dua metode:

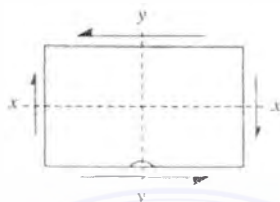
1. Metode analitik, dan
2. Metode grafik.

3.3 Metode Analitik Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Sebuah Benda

Konvensi tanda yang digunakan untuk metode analitik:

1. Semua tegangan dan regangan tarik dianggap positif dan semua tegangan dan regangan tekan dianggap negatif.

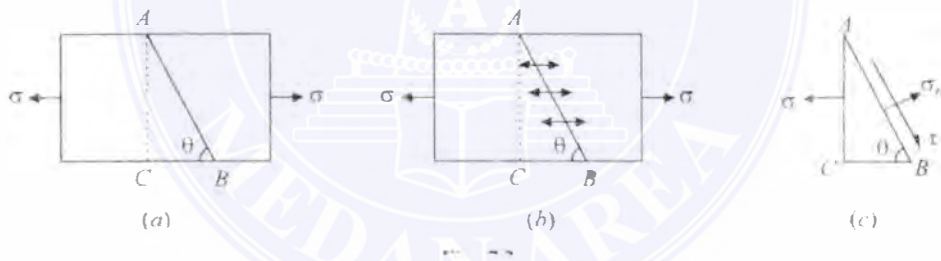
2. Tegangan geser yang akan memutar benda dalam arah searah jarum jam dianggap positif, sedangkan berlawanan dengan jarum jam dianggap negatif.



Gambar 3.1:

Pada benda yang ditunjukkan oleh gambar 3.1, tegangan geser pada sisi vertikal (sumbu x-x) diambil positif, sedangkan tegangan geser pada sisi horisontal (sumbu y-y) diambil negatif.

3.3.1 Tegangan Pada Bidang Miring Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang



Gambar 3.2:

Misalkan sebuah benda empat persegi panjang yang mempunyai luas penampang seragam dengan ketebalan satu satuan mendapat tegangan tarik langsung pada sumbu x-x seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.2(a). Misalkan sebuah penampang miring AB pada sumbu x-x,

jika σ = tegangan tarik pada penampang AC
 θ = sudut antara penampang AB dengan sumbu x-x

Pertama-tama, elemen ABC berada pada kondisi setimbang dimana diagram *free body* ditunjukkan oleh gambar 3.2(b) dan (c). Kita tahu bahwa gaya horisontal pada AC:

$$P = \sigma \cdot AC \quad (\rightarrow)$$

3.3. METODE ANALITIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA33

Gaya tegak lurus atau gaya normal pada bidang AB :

$$P_n = P \sin \theta = \sigma \cdot AC \sin \theta$$

Gaya tangensial pada penampang AB :

$$P_t = P \cos \theta = \sigma \cdot AC \cos \theta$$

Tegangan normal pada penampang AB :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\sigma \cdot AC \sin \theta}{AB} = \frac{\sigma \cdot AC \sin \theta}{\frac{AC}{\sin \theta}} = \sigma \sin^2 \theta \\ &= \frac{\sigma}{2} (1 - \cos 2\theta) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta\end{aligned}$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada penampang AB :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\sigma \cdot AC \cos \theta}{AB} = \frac{\sigma \cdot AC \cos \theta}{\frac{AC}{\sin \theta}} = \sigma \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta\end{aligned}$$

Dari persamaan tegangan normal, nilainya akan maksimal jika $\sin^2 \theta = 1$ atau $\sin \theta = 1$ atau $\theta = 90^\circ$. Dengan kata lain, permukaan AC akan mendapat tegangan langsung maksimum. Dengan cara yang sama, tegangan geser pada bidang AB akan maksimum jika $\sin 2\theta = 1$ atau $2\theta = 90^\circ$ atau 270° . Dengan kata lain tegangan geser akan maksimum pada sudut 45° dan 135° . Tegangan geser maksimum pada $\theta = 45^\circ$:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} \sin 90^\circ = \frac{\sigma}{2} \cdot 1 = \frac{\sigma}{2}$$

dan tegangan geser maksimum pada $\theta = 135^\circ$:

$$\tau_{max} = -\frac{\sigma}{2} \sin 270 = -\frac{\sigma}{2} \cdot (-1) = \frac{\sigma}{2}$$

Tegangan resultan diperoleh dari persamaan:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}$$

Bidang dengan tegangan normal maksimum dan minimum bisa diperoleh dengan menyamakan persamaan tegangan geser dengan nol.

$$\sigma \sin \theta \cos \theta = 0$$

Contoh soal 3.1. Sebuah batang dari kayu mendapat tegangan tarik sebesar 5 MPa. Berapakah harga tegangan normal dan geser pada penampang yang membuat sudut sebesar 25° dengan arah tegangan tarik.

Jawab.

Diketahui: $\sigma = 5 \text{ MPa}$
 $\theta = 25^\circ$

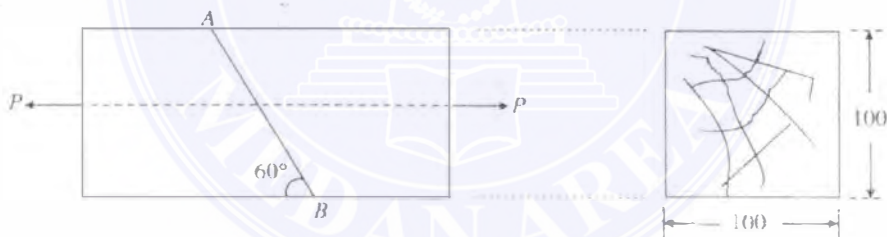
Tegangan normal pada penampang:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cos(2 \times 25^\circ) \text{ MPa} \\ &= 2,5 - 2,5 \cos 50^\circ = 2,5 - (2,5 \times 0,6428) \text{ MPa} \\ &= 2,5 - 1,607 = 0,89 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Tegangan geser pada penampang:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta = \frac{\sigma}{2} \sin(2 \times 25^\circ) = 2,5 \sin 50 \\ &= 2,5 \times 0,766 = 1,915 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Contoh soal 3.2. Dua potongan kayu ukuran penampang $100 \times 100 \text{ mm}$ disambung pada daerah garis AB seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.3. Carilah gaya maksimum (P) yang bisa diberikan jika tegangan geser pada sambungan AB adalah $1,3 \text{ MPa}$.



Gambar 3.3:

Jawab.

Diketahui: Penampang = $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$
 $\theta = 60^\circ$
 $\sigma = 1,3 \text{ MPa} = 1,3 \text{ N/mm}^2$

$$A = 100 \times 100 = 10.000 \text{ mm}^2$$

Tegangan geser:

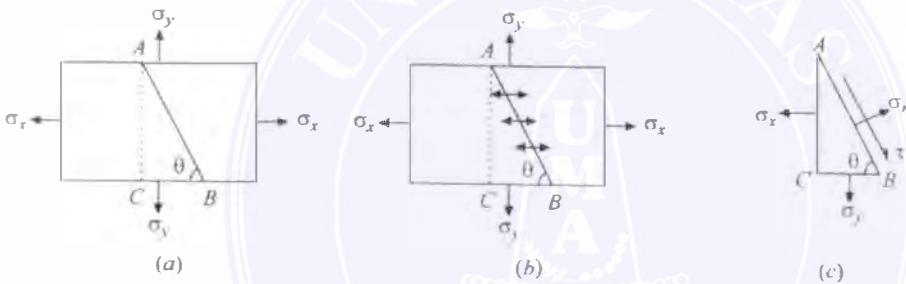
3.3. METODE ANALITIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA35

$$\begin{aligned}
 1,3 &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta = \frac{\sigma}{2} \sin(2 \times 60^0) = \frac{\sigma}{2} \sin 120^0 = \frac{\sigma}{2} \times 0,866 \\
 &= 0,433\sigma \\
 \sigma &= \frac{1,3}{0,433} = 3,0 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

Gaya aksial maksimum yang bisa diberikan:

$$P = \sigma \cdot A = 3,0 \times 10000 = 30.000 \text{ N} = 30 \text{ kN}$$

3.3.2 Tegangan Pada Bidang Miring Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Arah Yang Saling Tegak Lurus



Gambar 3.4:

Misalkan sebuah benda empat persegi panjang yang mempunyai luas penampang seragam dengan ketebalan satu satuan mendapat tegangan tarik langsung pada dua arah yang saling tegak lurus pada sumbu x-x dan sumbu y-y seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.4. Misalkan sebuah penampang miring AB pada sumbu x-x,

Jika: σ_x = Tegangan tarik pada sumbu x-x (disebut juga tegangan tarik major)
 σ_y = Tegangan tarik pada sumbu y-y (disebut juga tegangan tarik minor)
 θ = Sudut bidang miring AB dengan sumbu x-x

Pertama-tama, elemen ABC berada pada kondisi setimbang. Kita tahu bahwa gaya horisontal pada AC:

$$P_x = \sigma_x \cdot AC (\rightarrow)$$

dan gaya vertikal pada BC:

$$P_y = \sigma_y \cdot BC (\downarrow)$$

Gaya tegak lurus atau gaya normal pada bidang AB:

$$P_n = P_x \sin \theta + P_y \cos \theta = \sigma_x \cdot AC \sin \theta + \sigma_y \cos \theta$$

Gaya tangensial pada penampang AB:

$$P_t = P_x \cos \theta - P_y \sin \theta = \sigma_x \cdot AC \cos \theta - \sigma_y BC \sin \theta$$

Tegangan normal pada penampang AB:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta + \sigma_y \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta + \sigma_y \cdot BC \cos \theta}{AB} = \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta}{AB} + \frac{\sigma_y \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta = \frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y}{2} \cos 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada penampang AB:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta - \sigma_y \cdot BC \sin \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta}{AB} - \frac{\sigma_y \cdot BC \sin \theta}{AB} = \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta}{AB} - \frac{\sigma_y \cdot BC \sin \theta}{AB} \\ &= \sigma_x \sin \theta \cos \theta - \sigma_y \sin \theta \cos \theta \\ &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

Tegangan geser akan maksimum jika $\sin 2\theta = 1$ atau $2\theta = 90^\circ$ atau $\theta = 45^\circ$. Maka tegangan geser maksimum:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

Tegangan resultan diperoleh dari persamaan:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}$$

Contoh soal 3.3. Sebuah titik pada material yang mengalami deformasi mendapat dua tegangan tarik yang saling tegak lurus sebesar 200 MPa dan 100 MPa. Carilah besarnya tegangan geser, tegangan normal dan tegangan resultan pada sebuah bidang dengan kemiringan 30° dengan sumbu tegangan tarik mayor.

3.3. METODE ANALITIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA 37

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 200 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = 100 \text{ MPa}$
 $\theta = 30^\circ$

Tegangan normal pada bidang miring:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta \\ &= \frac{200 + 100}{2} - \frac{200 - 100}{2} \cos(2 \times 30^\circ) \\ &= 150 - (50 \times 0,5) = 125 \text{ MPa}\end{aligned}$$

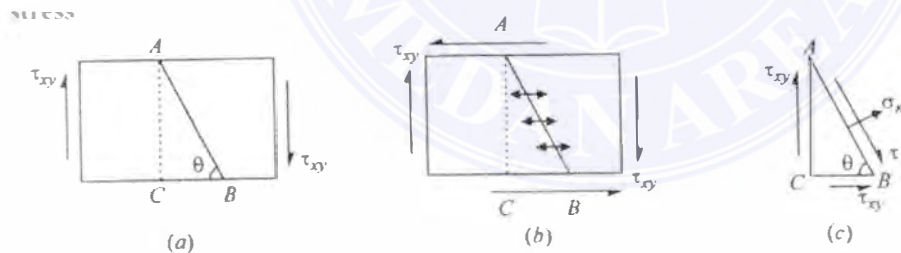
Tegangan geser pada bidang miring:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta = \frac{200 - 100}{2} \sin(2 \times 30^\circ) \\ &= 50 \sin 60^\circ = 50 \times 0,866 = 43,3 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Tegangan resultan pada bidang miring:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2} = \sqrt{(125)^2 + (43,3)^2} = 132,3 \text{ MPa}$$

3.3.3 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Geser Sederhana



Gambar 3.5:

Misalkan sebuah benda mendapat tegangan geser positif sepanjang sumbu x-x seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.5(a). Bidang AB membentuk sudut dengan sumbu x-x dan kita akan mencari tegangan-tegangan seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.5(b).

Jika: τ_{xy} = tegangan geser positif sepanjang sumbu x-x
 θ = sudut yang dibentuk bidang AB dengan sumbu x-x.

Gaya vertikal yang bekerja pada permukaan AC:

$$P_1 = \tau_{xy} \cdot AC (\downarrow)$$

dan gaya horisontal pada permukaan BC:

$$P_2 = \tau_{xy} \cdot BC (\rightarrow)$$

Gaya tegak lurus bidang AB atau gaya normal:

$$P_n = P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta = \tau_{xy} \cdot AC \cos \theta + \tau_{xy} \cdot BC \sin \theta$$

Gaya tangensial pada bidang AB:

$$P_t = P_1 \sin \theta - P_2 \cos \theta = \tau_{xy} \cdot AC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot BC \cos \theta$$

Tegangan normal pada bidang AB:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\tau_{xy} \cdot AC \cos \theta + \tau_{xy} \cdot BC \sin \theta}{AB} \\ &= \frac{\tau_{xy} \cdot AC \cos \theta}{AB} + \frac{\tau_{xy} \cdot BC \sin \theta}{AB} \\ &= \frac{\tau_{xy} \cdot AC \cos \theta}{\frac{AC}{\sin \theta}} + \frac{\tau_{xy} \cdot BC \sin \theta}{\frac{BC}{\cos \theta}} \\ &= \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta \\ &= 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta = \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \end{aligned}$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada bidang AB:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\tau_{xy} \cdot AC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\tau_{xy} \cdot AC \sin \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\tau_{xy} \cdot AC \sin \theta}{\frac{AC}{\sin \theta}} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{\frac{BC}{\cos \theta}} \\ &= \tau_{xy} \cdot \sin^2 \theta - \tau_{xy} \cdot \cos^2 \theta \\ &= \frac{\tau_{xy}}{2} (1 - \cos 2\theta) - \frac{\tau_{xy}}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ &= \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2} \cos 2\theta - \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2} \cos 2\theta \\ &= -\tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

tanda negatif menunjukkan bahwa tegangan mempunyai arah yang berlawanan pada bidang AC.

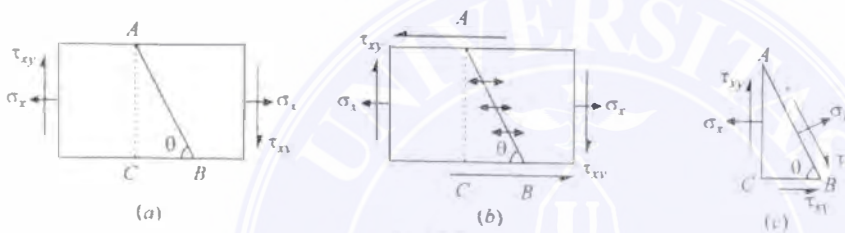
Tegangan normal maksimum dan minimum bisa dicari dengan menyamakan persamaan tegangan geser dengan nol:

3.3. METODE ANALITIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA

$$-\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Persamaan di atas terpenuhi jika $2\theta = 90^\circ$ atau 270° atau dengan kata lain $\theta = 45^\circ$ atau 135° .

3.3.4 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang Disertai Dengan Tegangan Geser Sederhana



Gambar 3.6:

Misalkan sebuah benda segi empat mendapat tegangan tarik pada sumbu x-x diikuti dengan tegangan geser positif sepanjang sumbu x-x seperti ditunjukkan oleh gambar 3.6(a).

Jika: σ_x = Tegangan tarik pada sumbu x-x
 τ_{xy} = tegangan geser positif sepanjang sumbu x-x
 θ = sudut yang dibentuk bidang AB dengan sumbu x-x.

Gaya horisontal yang bekerja pada permukaan AC:

$$P_x = \sigma_x \cdot AC \quad (\rightarrow)$$

dan gaya vertikal pada permukaan AC:

$$P_y = \tau_{xy} \cdot AC \quad (\downarrow)$$

Gaya horisontal yang bekerja pada permukaan BC:

$$P = \tau_{xy} \cdot BC \quad (\rightarrow)$$

Gaya tegak lurus bidang AB atau gaya normal:

$$\begin{aligned} P_n &= P_x \sin \theta - P_y \cos \theta - P \sin \theta \\ &= \sigma_x \cdot AC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot AC \cos \theta - \tau_{xy} \cdot BC \sin \theta \end{aligned}$$

Gaya tangensial pada bidang AB:

$$\begin{aligned} P_t &= P_x \cos \theta + P_y \sin \theta - P \cos \theta \\ &= \sigma_x \cdot AC \sin \theta + \tau_{xy} \cdot AC \cos \theta - \tau_{xy} \cdot BC \sin \theta \end{aligned}$$

Tegangan normal pada bidang AB:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot AC \cos \theta - \tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot AC \cos \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot AC \cos \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{AC}{\sin \theta} \frac{\sigma_x \sin \theta}{AB} - \frac{AC}{\sin \theta} \frac{\tau_{xy} \cos \theta}{AB} - \frac{BC}{\cos \theta} \frac{\tau_{xy} \cos \theta}{AB} \\ &= \sigma_x \cdot \sin^2 \theta - \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos 2\theta) - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada bidang AB:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta + \tau_{xy} \cdot AC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta}{AB} + \frac{\tau_{xy} \cdot AC \sin \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta}{AB} + \frac{\tau_{xy} \cdot AC \sin \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{AC}{\sin \theta} \frac{\sigma_x \cos \theta}{AB} + \frac{AC}{\sin \theta} \frac{\tau_{xy} \sin \theta}{AB} - \frac{BC}{\cos \theta} \frac{\tau_{xy} \cos \theta}{AB} \\ &= \sigma_x \cdot \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cdot \sin^2 \theta - \tau_{xy} \cdot \cos^2 \theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta + \frac{\tau_{xy}}{2} (1 - \cos 2\theta) - \frac{\tau_{xy}}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta + \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2} \cos 2\theta - \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2} \cos 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bidang yang mempunyai tegangan normal maksimal dan minimal bisa dicari dengan menyamakan persamaan tegangan geser dengan nol.

Misalkan θ_p adalah harga sudut dimana tegangan geser adalah nol. Maka:

$$\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta_p - \tau_{xy} \cos 2\theta_p = 0$$

$$\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta_p = \tau_{xy} \cos 2\theta_p$$

3.3. METODE ANALITIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA41



Gambar 3.7:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}$$

Dari persamaan di atas, kita peroleh bahwa 2 kondisi berikut akan memenuhi persamaan tersebut seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.7(a) dan (b). Untuk kasus 1, kita peroleh:

$$\sin 2\theta_{p1} = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \text{ dan } \cos 2\theta_{p1} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

dengan cara yang sama untuk kasus 2:

$$\sin 2\theta_{p2} = \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \text{ dan } \cos 2\theta_{p2} = \frac{-\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Sekarang harga tegangan prinsipal bisa dicari dengan mensubstitusikan harga-harga $2\theta_{p1}$ dan $2\theta_{p2}$ di atas ke persamaan 3.1. Maka tegangan prinsipal maksimum:

$$\begin{aligned} \sigma_{p1} &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \times \frac{-\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \times \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \frac{2\tau_{xy}^2}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \\ &= \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

dan tegangan prinsipal minimum:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{p2} &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \times \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
 &= \frac{\sigma_x}{2} \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} - \frac{2\tau_{xy}^2}{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
 &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
 \end{aligned}$$

Contoh soal 3.4. Sebuah elemen bidang pada sebuah benda mendapat tegangan tarik sebesar 100 MPa disertai dengan tegangan geser sebesar 25 MPa. Carilah (i) tegangan normal dan tegangan geser sebuah bidang yang membentuk sudut sebesar 20° dengan tegangan tarik dan, (ii) tegangan prinsipal maksimum pada bidang.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 100$ MPa
 $\tau_{xy} = 25$ MPa
 $\theta = 20^\circ$

(i) Tegangan normal dan tegangan geser:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\
 &= \frac{100}{2} - \frac{100}{2} \cos(2 \times 20^\circ) - 25 \sin(2\theta \times 20^\circ) \\
 &= 50 - 50 \cos 40^\circ - 25 \sin 40^\circ \\
 &= 50 - (50 \times 0,766) - (25 \times 0,6428) \\
 &= 50 - 38,3 - 16,7 = 4,37 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \\
 &= \frac{100}{2} \sin(2 \times 20^\circ) - 25 \cos(2 \times 20^\circ) \\
 &= 50 \sin 40^\circ - 25 \cos 40^\circ \\
 &= (50 \times 0,6428) - (25 \times 0,766) \\
 &= 32,14 - 19,15 = 12,99 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

(ii) Tegangan prinsipal maksimum pada bidang:

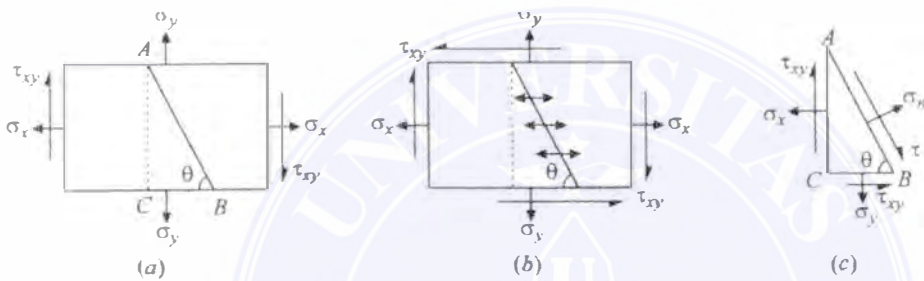
$$\sigma_{p1} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

3.3. METODE ANALITIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA43

$$= \frac{100}{2} + \sqrt{\left(\frac{100}{2}\right)^2 + (25)^2}$$

$$= 105,9 \text{ MPa}$$

3.3.5 Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Bidang Yang Saling Tegak Lurus Disertai Dengan Tegangan Geser Sederhana



Gambar 3.8:

Misalkan sebuah benda persegi empat mendapat tegangan tarik pada sumbu x-x dan sumbu y-y dan disertai dengan tegangan geser positif pada seonjang sumbu x-x, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.8(b).

- Jika:
- σ_x = tegangan tarik pada sumbu x-x
 - σ_y = tegangan tarik pada sumbu y-y
 - τ_{xy} = tegangan geser positif pada sumbu x-x
 - θ = sudut bidang AB dengan sumbu y-y

Gaya horisontal yang bekerja pada permukaan AC:

$$P_1 = \sigma_x \cdot AC \text{ (} \rightarrow \text{)}$$

dan gaya vertikal pada permukaan AC:

$$P_2 = \tau_{xy} \cdot AC \text{ (} \downarrow \text{)}$$

gaya vertikal pada permukaan BC:

$$P_3 = \sigma_x \cdot BC \text{ (} \downarrow \text{)}$$

Gaya horisontal yang bekerja pada permukaan BC:

$$P_4 = \tau_{xy} \cdot BC \text{ (} \rightarrow \text{)}$$

Gaya tegak lurus bidang AB atau gaya normal:

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 \sin \theta - P_2 \cos \theta + P_3 \cos \theta - P_4 \sin \theta \\ &= \sigma_x \cdot AC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot AC \cos \theta + \sigma_y \cdot BC \cos \theta - \tau_{xy} \cdot BC \sin \theta \end{aligned}$$

Gaya tangensial pada bidang AB :

$$\begin{aligned} P_t &= P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta - P_3 \sin \theta - P_4 \cos \theta \\ &= \sigma_x \cdot AC \cos \theta + \tau_{xy} \cdot AC \sin \theta - \sigma_y \cdot BC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot BC \cos \theta \end{aligned}$$

Tegangan normal pada bidang AB :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{P_n}{AB} = \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot AC \cos \theta + \sigma_y \cdot BC \cos \theta - \tau_{xy} \cdot BC \sin \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot AC \cos \theta}{AB} + \frac{\sigma_y \cdot BC \cos \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \sin \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \sin \theta}{\frac{AC}{\sin \theta}} - \frac{\tau_{xy} \cdot AC \cos \theta}{\frac{AC}{\sin \theta}} + \frac{\sigma_y \cdot BC \cos \theta}{\frac{BC}{\cos \theta}} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \sin \theta}{\frac{BC}{\cos \theta}} \\ &= \sigma_x \cdot \sin^2 \theta - \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \cdot \cos^2 \theta - \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2} (1 + \cos 2\theta) - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

dan tegangan geser (tegangan tangensial) pada bidang AB :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{P_t}{AB} = \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta + \tau_{xy} \cdot AC \sin \theta - \sigma_y \cdot BC \sin \theta - \tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta}{AB} + \frac{\tau_{xy} \cdot AC \sin \theta}{AB} - \frac{\sigma_y \cdot BC \sin \theta}{AB} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{AB} \\ &= \frac{\sigma_x \cdot AC \cos \theta}{\frac{AC}{\sin \theta}} + \frac{\tau_{xy} \cdot AC \sin \theta}{\frac{AC}{\sin \theta}} - \frac{\sigma_y \cdot BC \sin \theta}{\frac{BC}{\cos \theta}} - \frac{\tau_{xy} \cdot BC \cos \theta}{\frac{BC}{\cos \theta}} \\ &= \sigma_x \cdot \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cdot \sin^2 \theta - \sigma_y \cdot \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy} \cdot \cos^2 \theta \\ &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\tau_{xy}}{2} (1 - \cos 2\theta) - \frac{\tau_{xy}}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2} \cos 2\theta - \frac{\tau_{xy}}{2} - \frac{\tau_{xy}}{2} \cos 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bidang yang mempunyai tegangan normal maksimal dan minimal bisa dicari dengan menyamakan persamaan tegangan geser dengan nol.

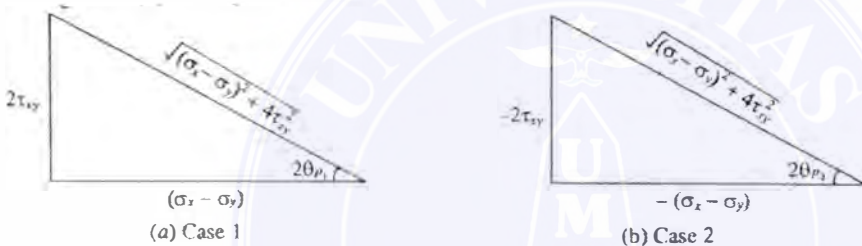
3.3. METODE ANALITIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA45

Misalkan θ_p adalah harga sudut dimana tegangan geser adalah nol. Maka:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_p - \tau_{xy} \cos 2\theta_p = 0$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_p = \tau_{xy} \cos 2\theta_p$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Gambar 3.9:

Dari persamaan di atas, kita peroleh bahwa 2 kondisi berikut akan memenuhi persamaan tersebut seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.9(a) dan (b). Untuk kasus 1, kita peroleh:

$$\sin 2\theta_{p1} = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \text{ dan } \cos 2\theta_{p1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

dengan cara yang sama untuk kasus 2:

$$\sin 2\theta_{p2} = \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \text{ dan } \cos 2\theta_{p2} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Sekarang harga tegangan prinsipal bisa dicari dengan mensubstitusikan harga-harga $2\theta_{p1}$ dan $2\theta_{p2}$ di atas ke persamaan 3.3. Maka tegangan prinsipal maksimum:

$$\begin{aligned} \sigma_{p1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \times \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
 \end{aligned}$$

dan tegangan prinsipal minimum:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{p2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \frac{-(\sigma_x + \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \times \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)^2 - 2\tau_{xy}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\
 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
 \end{aligned}$$

Contoh soal 3.5. Sebuah titik mendapat tegangan tarik sebesar 250 MPa pada arah horisontal dan tegangan tarik sebesar 100 MPa pada arah vertikal. Titik tersebut juga mendapat tegangan geser sebesar 25 MPa, yang apabila dikaitkan dengan tegangan tarik mayor, akan merotasi elemen searah jarum jam. Berapakah besar tegangan normal dan geser pada penampang yang membentuk sudut sebesar 20° dengan tegangan tarik mayor.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 250$ MPa
 $\sigma_y = 100$ MPa
 $\tau_{xy} = 25$ MPa
 $\theta = 20^\circ$

Besar Tegangan Normal:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\
 &= \frac{250 + 100}{2} - \frac{250 - 100}{2} \cos(2 \times 20^\circ) - 25 \sin(2 \times 20^\circ) \\
 &= 175 - (75 \times 0,766) - (25 \times 0,6428) \\
 &= 175 - 57,5 - 16,07 = 101,48 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Besar Tegangan Geser:

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

3.3. METODE ANALITIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA47

$$\begin{aligned} &= \frac{250 - 100}{2} \sin(2 \times 20^0) - 25 \cos(2 \times 20^0) \\ &= 75 \sin(40^0) - 25 \cos(40^0) \\ &= (75 \times 0,6428) - (25 \times 0,766) \\ &= 48,21 - 19,15 = 29,06 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Contoh soal 3.6. Sebuah elemen bidang pada sebuah boiler menerima tegangan tarik sebesar 400 MPa pada satu bidang dan 150 MPa pada bidang lainnya yang tegak lurus terhadap bidang pertama. Setiap tegangan tersebut disertai dengan tegangan geser sebesar 100 MPa dimana jika dikaitkan dengan tegangan tarik minor akan cenderung merotasikan elemen berlawanan arah jarum jam. Carilah:

1. Tegangan prinsipal dan arahnya.
2. Tegangan geser maksimum dan arahnya pada bidang dimana tegangan ini bekerja.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 400 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = 150 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy} = -100 \text{ MPa}$

1. Tegangan prinsipal dan arahnya:
Tegangan prinsipal maksimum:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{400 + 150}{2} + \sqrt{\left(\frac{400 - 150}{2}\right)^2 + (-100)^2} \\ &= 275 + 160,1 = 435,1 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Tegangan prinsipal minimum:

$$\begin{aligned} \sigma_{min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{400 + 150}{2} - \sqrt{\left(\frac{400 - 150}{2}\right)^2 + (-100)^2} \\ &= 275 - 160,1 = 114,9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Misalkan θ_p = sudut bidang prinsipal dengan sumbu x-x

$$\begin{aligned}\tan 2\theta_p &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 100}{400 - 150} = 0,8 \\ 2\theta_p &= 38,66^\circ \\ \theta_p &= 19,33^\circ \text{ atau } 109,33^\circ\end{aligned}$$

2. Tegangan geser maksimum dan arahnya:

$$\begin{aligned}\tau_{max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{400 - 150}{2}\right)^2 + (-100)^2} \\ &= 160,1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Misalkan θ_s = sudut bidang tegangan geser maksimum dengan sumbu x-x.

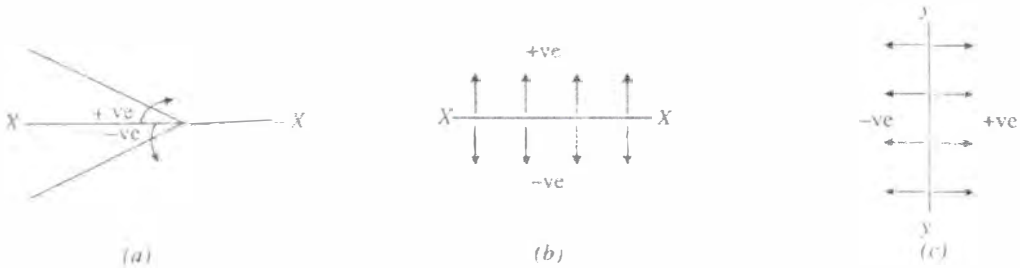
$$\begin{aligned}\tan 2\theta_s &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{400 - 150}{2 \times 100} = 1,25 \\ 2\theta_s &= 51,34^\circ \\ \theta_s &= 25,67^\circ \text{ atau } 115,67^\circ\end{aligned}$$

3.4 Metode Grafik Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Sebuah Benda

Konvensi tanda yang digunakan dalam metode grafik:

1. Sudut diambil dengan referensi sumbu x-x. Semua sudut yang mempunyai arah berlawanan jarum jam dianggap negatif, dan searah jarum jam dianggap positif, seperti ditunjukkan oleh gambar 3.10(a). Harga sudut positif jika ditarik ke arah searah jarum jam.
2. Pengukuran yang dilakukan di atas sumbu x-x dan di kanan sumbu y-y diambil positif, sedangkan di bawah sumbu x-x dan di kiri sumbu y-y di ambil negatif, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.10(b) dan (c).
3. Kadang-kadang diperoleh sedikit perbedaan dari hasil metode analitik dengan metode grafik. Harga yang diperoleh dari metode grafik dianggap benar jika selisih satu angka desimal dengan hasil metode analitik, contoh: 7,55 (analitik) = 7,6 (metode grafik).

3.4. METODE GRAFIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA⁴⁹



Gambar 3.10:

3.4.1 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Satu Bidang

Misalkan sebuah benda empat persegi panjang mendapat tegangan tarik langsung pada sumbu x-x seperti ditunjukkan oleh gambar 3.11(a) dan (b).



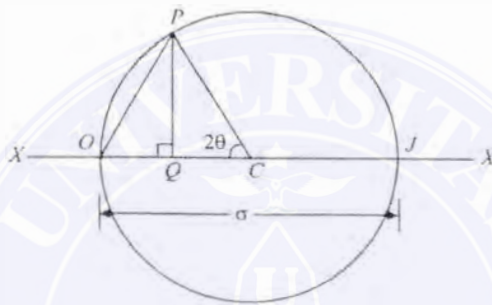
Gambar 3.11:

Jika σ = tegangan tarik pada penampang AC
 θ = sudut antara penampang AB dengan sumbu x-x

Untuk mencari tegangan pada bidang miring AB, kita gunakan lingkaran Mohr tegangan seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.12, dengan prosedur sebagai berikut:

1. pertama-tama, ambil sembarang titik O, dan melalui titik O tersebut gambar garis XOX.
2. Dengan menggunakan skala tertentu, buat potongan garis OJ sesuai besarnya tegangan tarik (σ) ke kanan (sebab tegangan adalah tarik). Bagi dua potongan garis OJ dengan pusatnya ada pada titik C.
3. Dengan C sebagai pusat dan jari jari CO atau CJ buatlah sebuah lingkaran. Lingkaran ini disebut *Lingkaran Mohr untuk Tegangan*.

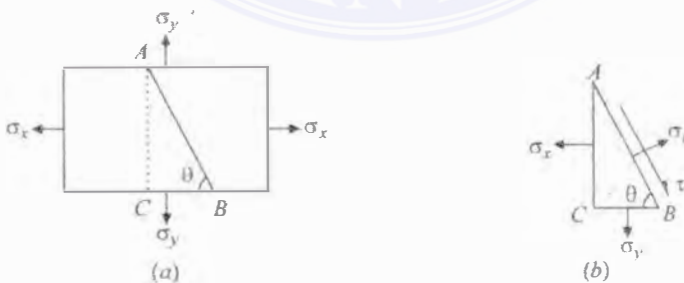
4. Melalui titik C gambarlah garis CP dengan sudut sebesar 2θ dengan CO dan arah searah jarum jam, memotong lingkaran pada titik P .
5. Melalui P , gambar garis PQ yang tegak lurus terhadap OX . Tarik garis OP .
6. Panjang garis OQ , QP dan OP masing-masing adalah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan, sesuai dengan skala yang digunakan. Sudut POJ merupakan sudut kemiringan (θ).



Gambar 3.12:

3.4.2 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Tegangan Langsung Pada Dua Arah Yang Saling Tegak Lurus

Misalkan sebuah persegi panjang mendapat tegangan tarik langsung pada dua arah yang saling tegak lurus yaitu pada sumbu $x-x$ dan sumbu $y-y$ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.13(a) dan (b).



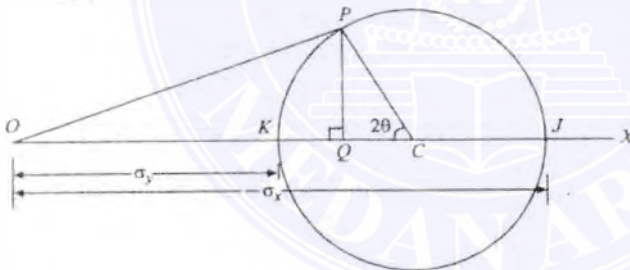
Gambar 3.13:

3.4. METODE GRAFIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA51

Diketahui: σ_x = tegangan tarik pada arah sumbu x-x (atau tegangan tarik major)
 σ_y = tegangan tarik pada arah sumbu y-y (atau tegangan tarik minor)
 θ = sudut bidang miring AB dengan sumbu x-x searah jarum jam

Prosedur menggambar diagram Mohr (perhatikan gambar 3.14):

1. Pertama-tama, ambil sembarang titik O dan gambarlah garis horisontal OX.
2. Dengan menggunakan skala tertentu, buat potongan garis OJ sesuai besarnya tegangan tarik (σ_x) dan OK sesuai besarnya tegangan tarik (σ_y) ke kanan (sebab tegangan adalah tarik). Bagi dua sama besar potongan garis JK dengan pusatnya ada pada titik C.
3. Dengan C sebagai pusat dan jari jari CJ atau CK buatlah sebuah lingkaran. Lingkaran ini disebut *Lingkaran Mohr untuk Tegangan*.
4. Melalui titik C gambarlah garis CP dengan sudut sebesar 2θ dengan CK dan arah searah jarum jam, memotong lingkaran pada titik P.
5. Melalui P, gambar garis PQ yang tegak lurus terhadap OX. Tarik garis OP.
6. Panjang garis OQ, QP dan OP masing-masing adalah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan, sesuai dengan skala yang digunakan. Sudut POC merupakan sudut kemiringan (θ).



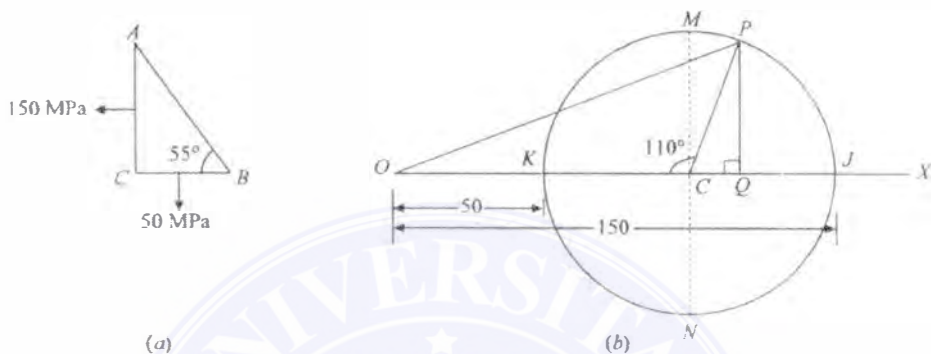
Gambar 3.14:

Contoh soal 3.7. Tegangan pada sebuah titik pada sebuah komponen mesin adalah 150 MPa dan 50 MPa dan kedua-duanya adalah tarik. Carilah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan pada sebuah bidang yang membentuk sudut sebesar 55° dengan sumbu tegangan tarik mayor.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 150$ MPa
 $\sigma_y = 50$ MPa
 $\theta = 55^\circ$

Tegangan yang diketahui pada bidang AC dan BC pada komponen mesin ditunjukkan oleh gambar 3.15(a).



Gambar 3.15:

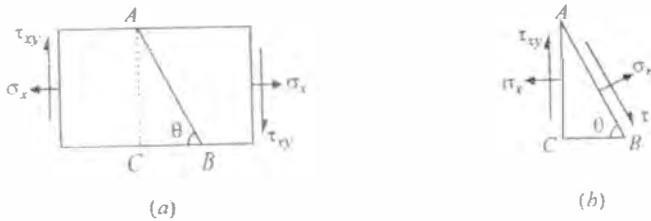
Sekarang gambarlah lingkaran tegangan Mohr seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.15(b) dan diuraikan sebagai berikut:

1. Pertama-tama, ambillah sembarang titik O dan buatlah garis horisontal OX .
2. Buat potongan garis OJ dan OK yang masing-masing besarnya sama dengan σ_x dan σ_y sesuai dengan skala tertentu ke kanan. Bagi dua garis KJ dengan pusatnya pada C .
3. Dengan C sebagai pusat dan jari-jari CJ atau CK , gambarlah lingkaran tegangan Mohr.
4. Melalui C gambarlah dua garis CM dan CN yang tegak lurus terhadap garis OX dan memotong lingkaran pada M dan N . Melalui C gambar juga garis CP yang membentuk sudut $2 \times 55^\circ = 110^\circ$ dengan CK pada arah searah jarum jam dan memotong lingkaran pada titik P .
5. Melalui P , gambarlah PQ yang tegak lurus terhadap garis OX . Buat garis PO . Dengan pengukuran, kita memperoleh tegangan normal $(\sigma_n) = OQ = 117$ MPa. Tegangan geser $(\tau) = QP = 47,0$ MPa; tegangan resultan $(\sigma_R) = OP = 126,2$ MPa dan tegangan geser maksimum $(\tau_{max}) = CM = \pm 50$ MPa.

3.4.3 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Sebuah Tegangan Langsung Pada Satu Bidang Disertai Dengan Sebuah Tegangan Geser

Misalkan sebuah persegi panjang mendapat tegangan tarik langsung pada dua arah yang saling tegak lurus yaitu pada sumbu $x-x$ dan sumbu $y-y$ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.16(a) dan (b).

3.4. METODE GRAFIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA



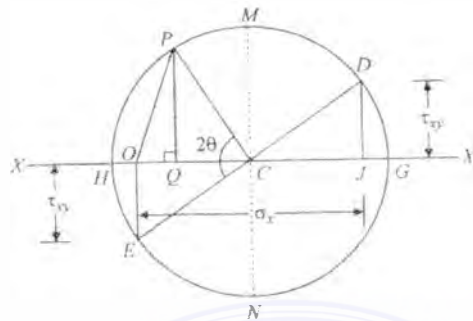
Gambar 3.16:

Diketahui: σ_x = tegangan tarik pada arah sumbu x-x
 τ_{xy} = tegangan geser positif pada arah sumbu x-x
 θ = sudut bidang miring AB dengan sumbu x-x searah jarum jam

Prosedur menggambar diagram Mohr (perhatikan gambar 3.17):

1. Pertama-tama, ambil sembarang titik O dan gambarlah garis horisontal XOX.
2. Dengan menggunakan skala tertentu, buat potongan garis OJ sesuai besarnya tegangan tarik (σ_x).
3. Buat garis tegak lurus pada J di atas garis X-X (sebab τ_{xy} positif pada sumbu x-x) dan buat potongan garis JD yang besarnya sesuai dengan tegangan geser τ_{xy} dengan skala tertentu. Dengan cara yang sama buat garis tegak lurus pada titik O di bawah garis x-x (karena τ_{xy} negatif pada sumbu y-y) dan buat potongan garis OE yang besarnya sama dengan tegangan geser τ_{xy} . Tarik garis DE dan bagi dua pada C.
4. Dengan C sebagai pusat dan jari jari CD atau CE buatlah sebuah lingkaran. Lingkaran ini disebut *Lingkaran Mohr untuk Tegangan*.
5. Melalui titik C gambarlah garis CP dengan sudut sebesar 2θ dengan CE dan arah searah jarum jam, memotong lingkaran pada titik P.
6. Melalui P, gambar garis PQ yang tegak lurus terhadap OX. Tarik garis OP.
7. Panjang garis OQ, QP dan OP masing-masing adalah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan, sesuai dengan skala yang digunakan. Sudut POC merupakan sudut kemiringan (θ).

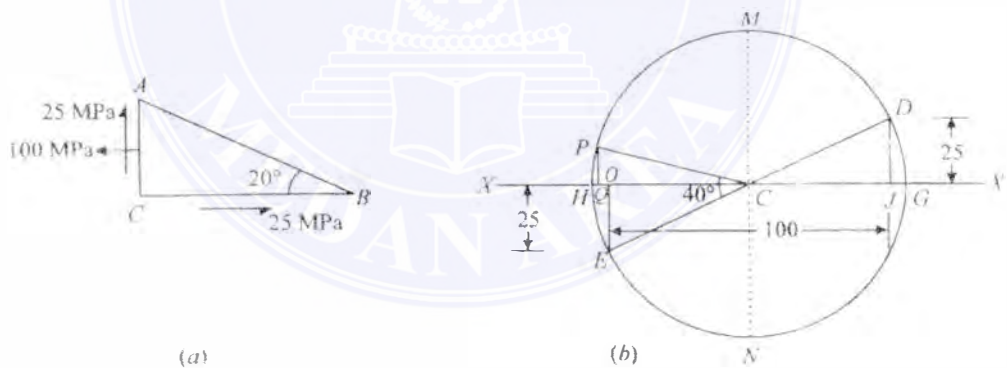
Contoh soal 3.8. Sebuah elemen bidang pada sebuah benda mendapat tegangan tarik sebesar 100 MPa dan disertai dengan tegangan geser searah jarum jam sebesar 25 MPa. Carilah (i) tegangan normal dan geser pada bidang yang membentuk sudut sebesar 20° dengan tegangan tarik; dan (ii) tegangan geser maksimum pada bidang.



Gambar 3.17:

Jawab.Diketahui: $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$ $\tau_{xy} = 25 \text{ MPa}$ $\theta = 20^\circ$

Tegangan-tegangan pada elemen dan tegangan geser pada bidang BC ditunjukkan oleh gambar 3.18(a).



Gambar 3.18:

Sekarang gambarlah lingkaran tegangan Mohr seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.18(b) dan jelaskan sebagai berikut:

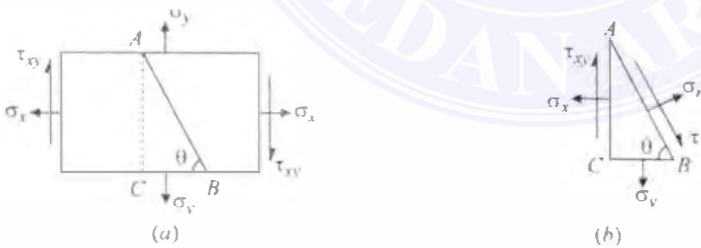
1. Pertama-tama, ambillah sembarang titik O dan buatlah garis horisontal XOX .
2. Buat potongan garis OJ yang besarnya sama dengan tegangan tarik σ_x (yaitu 100 MPa) sesuai dengan skala tertentu ke kanan.

3.4. METODE GRAFIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA55

3. Sekarang buat garis tegak lurus J di atas garis $X-X$ dan buat potongan garis JD yang sama besar dan positif dengan tegangan geser pada bidang BC (yaitu 25 MPa) sesuai dengan skala. Dengan cara yang sama buat garis tegak lurus O ke bawah garis $X-X$ dan buat garis OE yang besarnya sama dan negatif dengan tegangan geser bidang BC (yaitu 25 MPa) sesuai skala. Buat garis DE dan bagi dua di titik C .
4. Dengan C sebagai pusat dan jari-jari CD atau CE , gambarlah lingkaran tegangan Mohr.
5. Melalui C gambarlah dua garis CM dan CN yang tegak lurus terhadap garis OX dan memotong lingkaran pada M dan N . Melalui C gambar juga garis CP yang membentuk sudut $2 \times 20^\circ = 40^\circ$ dengan CE pada arah searah jarum jam dan memotong lingkaran pada titik P .
6. Melalui P , gambarlah PQ yang tegak lurus terhadap garis OX . Buat garis PO . Dengan pengukuran, kita memperoleh tegangan normal $(\sigma_n) = OQ = 4,4$ MPa (tekan). Tegangan geser $(\tau) = QP = 13,0$ MPa dan tegangan geser maksimum $(\tau_{max}) = CM = 55,9$ MPa.

3.4.4 Lingkaran Mohr Untuk Tegangan Pada Bidang Miring Pada Benda Yang Mendapat Dua Tegangan Langsung Pada Arah Yang Saling Tegak Lurus Disertai Dengan Sebuah Tegangan Geser

Misalkan sebuah persegi panjang mendapat tegangan tarik langsung pada dua arah yang saling tegak lurus yaitu pada sumbu $x-x$ dan sumbu $y-y$ dan diikuti oleh sebuah tegangan geser positif (searah jarum jam) pada sumbu $x-x$, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3.19(a) dan (b).

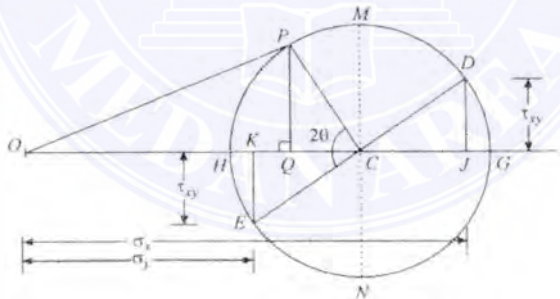


Gambar 3.19:

- Diketahui: σ_x = tegangan tarik pada arah sumbu $x-x$
 σ_y = tegangan tarik pada arah sumbu $y-y$
 τ_{xy} = tegangan geser positif pada arah sumbu $x-x$
 θ = sudut bidang miring AB dengan sumbu $x-x$ searah jarum jam

Prosedur menggambar diagram Mohr (perhatikan gambar 3.20):

1. Pertama-tama, ambil sembarang titik O dan gambarlah garis horisontal OX .
2. Dengan menggunakan skala tertentu, buat potongan garis OJ dan OK masing-masing sesuai besarnya tegangan tarik (σ_x) dan (σ_y) ke kanan (karena kedua tegangan adalah tarik).
3. Buat garis tegak lurus pada J di atas garis $X-X$ (sebab τ_{xy} positif pada sumbu $x-x$) dan buat potongan garis JD yang besarnya sesuai dengan tegangan geser τ_{xy} dengan skala tertentu. Dengan cara yang sama buat garis tegak lurus pada titik K di bawah garis $x-x$ (karena τ_{xy} negatif pada sumbu $y-y$) dan buat potongan garis KE yang besarnya sama dengan tegangan geser τ_{xy} . Tarik garis DE dan bagi dua pada C .
4. Dengan C sebagai pusat dan jari-jari CD atau CE buatlah sebuah lingkaran. Lingkaran ini disebut *Lingkaran Mohr untuk Tegangan*.
5. Melalui titik C gambarlah garis CP dengan sudut sebesar 2θ dengan CE dan arah searah jarum jam, memotong lingkaran pada titik P .
6. Melalui P , gambar garis PQ yang tegak lurus terhadap OX . Tarik garis OP .
7. Panjang garis OQ , QP dan OP masing-masing adalah besarnya tegangan normal, tegangan geser dan tegangan resultan, sesuai dengan skala yang digunakan. Garis OG dan OH masing-masing merupakan tegangan geser prinsipal maksimum dan minimum. Sudut POC merupakan sudut kemiringan (θ).



Gambar 3.20:

Contoh soal 3.9.¹ Sebuah elemen bidang pada sebuah boiler menerima tegangan tarik sebesar 400 MPa pada satu bidang dan 150 MPa pada bidang lainnya yang tegak lurus terhadap bidang pertama. Setiap tegangan tersebut disertai dengan tegangan geser sebesar 100 MPa dimana jika dikaitkan dengan tegangan tarik minor akan cenderung merotasikan elemen berlawanan arah jarum jam. Carilah:

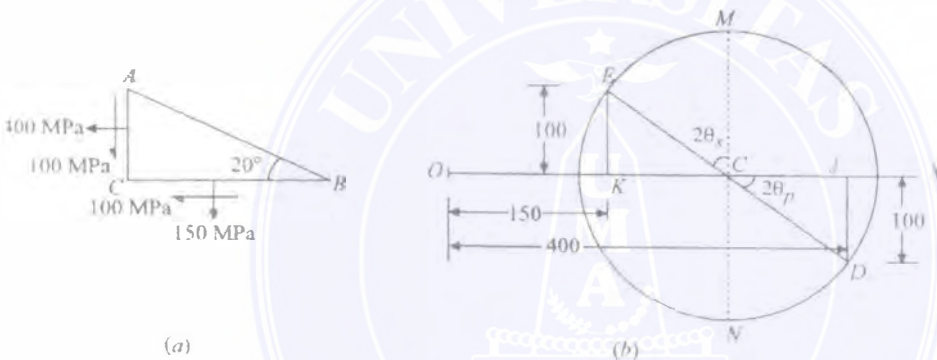
¹ Kita telah membahas soal ini dengan cara analitik pada halaman 47

3.4. METODE GRAFIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA57

1. Tegangan prinsipal dan arahnya.
2. Tegangan geser maksimum dan arahnya pada bidang dimana tegangan ini bekerja.

Jawab.

Diketahui: $\sigma_x = 400$ MPa
 $\sigma_y = 150$ MPa
 $\tau_{xy} = -100$ MPa (tanda negatif dikarenakan berlawanan jarum jam pada sumbu $x-x$)



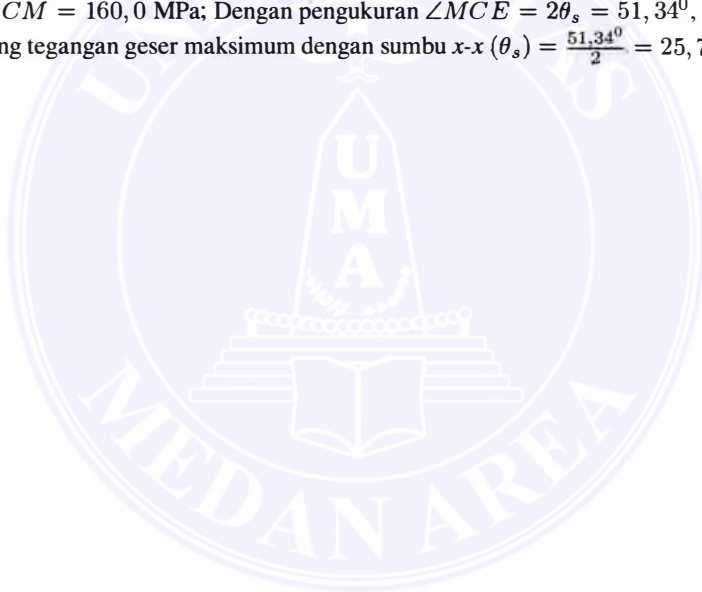
Gambar 3.21:

Tegangan-tegangan yang diberikan pada bidang AC dan BC dari elemen dan tegangan geser pada bidang BC ditunjukkan oleh gambar 3.21(a). Sekarang gambarlah diagram tegangan Mohr seperti ditunjukkan oleh gambar 3.21(b) dan bicarakan berikut ini.

1. Pertama-tama, ambillah sembarang titik O dan buatlah garis horisontal OX .
2. Buat potongan garis OJ dan OK yang masing-masing besarnya sama dengan tegangan tarik σ_x (yaitu 400 MPa) dan tegangan tarik σ_y (yaitu 150 MPa) sesuai dengan skala tertentu ke kanan.
3. Sekarang buat garis tegak lurus J di bawah garis OX dan buat potongan garis JD yang sama besar dan negatif dengan tegangan geser pada bidang AC (yaitu 100 MPa) sesuai dengan skala. Dengan cara yang sama buat garis tegak lurus K di atas garis OX dan buat garis KE yang besarnya sama dan positif dengan tegangan geser bidang BC (yaitu 100 MPa) sesuai skala. Buat garis DE dan bagi dua di titik C .

4. Dengan C sebagai pusat dan jari-jari CD atau CE , gambarlah lingkaran tegangan Mohr.
5. Melalui C gambarlah dua garis CM dan CN yang tegak lurus terhadap garis OX dan memotong lingkaran pada M dan N . Melalui C gambar juga garis CP yang membentuk sudut $2 \times 20^\circ = 40^\circ$ dengan CE pada arah searah jarum jam dan memotong lingkaran pada titik P .
6. Melalui P , gambarlah PQ yang tegak lurus terhadap garis OX . Buat garis PO .

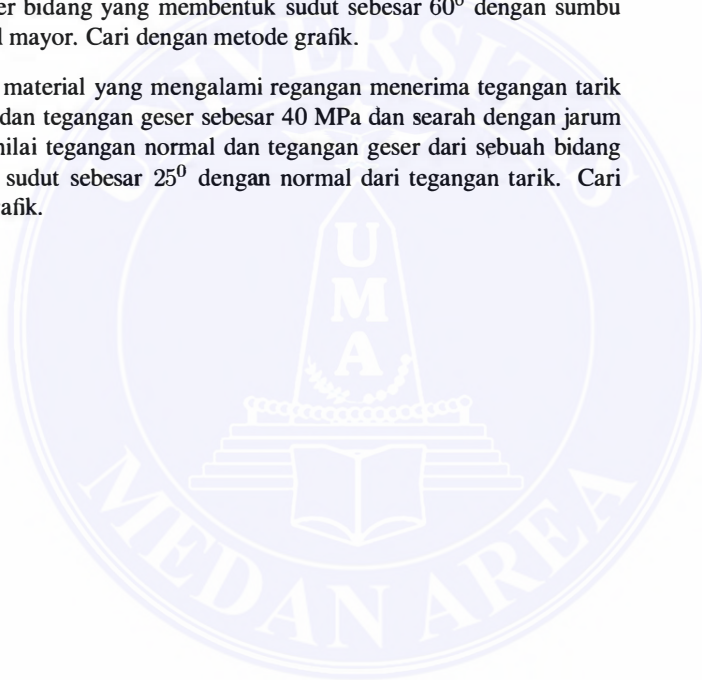
Dengan pengukuran, kita memperoleh tegangan prinsipal maksimum (σ_{max}) = $OG = 435,0$ MPa. Tegangan prinsipal minimum (σ_{min}) = $OH = 115,0$ MPa. Dengan pengukuran, $\angle JCD = 2\theta_p = 38,66^\circ$, maka sudut yang dibuat bidang tegangan prinsipal dengan sumbu $x-x$ (θ_p) = $\frac{\angle JCD}{2} = \frac{38,66^\circ}{2} = 19,33^\circ$; Tegangan geser maksimum (τ_{max}) = $CM = 160,0$ MPa; Dengan pengukuran $\angle MCE = 2\theta_s = 51,34^\circ$, maka sudut bidang tegangan geser maksimum dengan sumbu $x-x$ (θ_s) = $\frac{51,34^\circ}{2} = 25,7^\circ$.



3.4. METODE GRAFIK UNTUK TEGANGAN PADA BIDANG MIRING SEBUAH BENDA59

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah batang mendapat tegangan tarik sebesar 100 MPa. Carilah tegangan normal dan tangensial pada bidang dengan sudut 30° dengan arah tegangan tarik.
2. Sebuah titik pada sebuah material yang mengalami regangan mendapat tegangan tarik sebesar 50 MPa. Carilah tegangan normal dan tegangan geser pada sudut 50° dengan arah tegangan.
3. Sebuah titik pada sebuah material yang mengalami regangan, tegangan prinsipalnya adalah 100 MPa dan 50 MPa dan keduanya tarik. Carilah tegangan normal dan tegangan geser bidang yang membentuk sudut sebesar 60° dengan sumbu tegangan prinsipal mayor. Cari dengan metode grafik.
4. Sebuah titik pada material yang mengalami regangan menerima tegangan tarik sebesar 120 MPa dan tegangan geser sebesar 40 MPa dan searah dengan jarum jam. Berapakah nilai tegangan normal dan tegangan geser dari sebuah bidang yang membentuk sudut sebesar 25° dengan normal dari tegangan tarik. Cari dengan metode grafik.



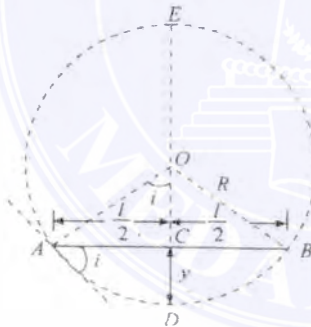


Bab 4

Defleksi Batang

4.1 Kurva Bending Batang

Misalkan sebuah batang AB mendapat momen bending. Karena pembebanan ini, maka batang mengalami defleksi dari ACB menjadi ADB yang berupa busur lingkaran, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.1.



Gambar 4.1: Kurva Batang

Misalkan l = panjang batang AB
 M = momen bending
 R = jari-jkari kurva kelengkungan batang
 I = momen inersia penampang batang
 E = modulus elastisitas material batang
 y = defleksi batang (yaitu: CD)
 i = kemiringan/slope batang

Dari geometri lingkaran, kita dapatkan:

$$\begin{aligned} AC \times CB &= EC \times CD \\ \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} &= (2R - y) \times y \\ \frac{l^2}{4} &= 2Ry - y^2 \end{aligned}$$

dengan mengabaikan y^2

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{4} &= 2Ry \\ y &= \frac{l^2}{8R} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Telah diketahui bahwa untuk batang yang mendapat beban berlaku:

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \text{ atau } R = \frac{EI}{M}$$

dengan mensubstitusikan harga R ini ke persamaan 4.1

$$y = \frac{l^2}{8 \times \frac{EI}{M}} = \frac{Ml^2}{8EI}$$

Dari bentuk geometri gambar, kita peroleh bahwa kemiringan batang i pada A atau B juga sama dengan sudut AOC :

$$\sin i = \frac{AC}{OA} = \frac{l}{2R}$$

karena sudut i sangat kecil, karenanya $\sin i$ diambil harganya sama dengan i (dalam radian).

$$i = \frac{l}{2R} \text{ radian} \quad (4.2)$$

Dengan mensubstitusikan harga R ke persamaan 4.2,

$$i = \frac{l}{2R} = \frac{l}{2 \times \frac{EI}{M}} = \frac{Ml}{2EI} \text{ radian} \quad (4.3)$$

Catatan:

1. Persamaan di atas untuk defleksi (y) dan kemiringan (i) diturunkan hanya dari momen bending dan efek gaya geser diabaikan. Hal ini dikarenakan bahwa efek gaya geser kecil sekali bila dibandingkan dengan efek momen bending.
2. Dalam kondisi praktis, batang membengkok membentuk busur lingkaran hanya pada beberapa kasus. Pembahasan lebih lanjut menunjukkan bahwa batang akan membengkok membentuk busur lingkaran hanya jika (i) batang mempunyai penampang yang seragam, dan (ii) batang mendapat momen konstan pada keseluruhan panjang atau batang mempunyai kekuatan yang seragam.

4.2. HUBUNGAN ANTARA KEMIRINGAN, DEFLEKSI DAN JARI-JARI KURVA⁶³

4.2 Hubungan Antara Kemiringan, Defleksi dan Jari-jari Kurva

Misalkan bagian kecil PQ dari sebuah batang, melengkung membentuk busur seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.2.

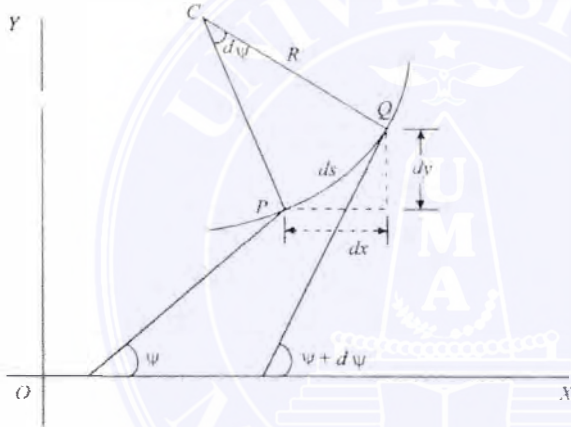
Misalkan ds = panjang batang PQ

R = jari-jari busur

C = pusat busur

ψ = sudut, yang merupakan tangen pada P dengan sumbu x-x

$\psi + d\psi$ = sudut yang merupakan tangen pada Q dengan sumbu x-x



Gambar 4.2: Batang membengkok membentuk busur.

Dari geometri gambar, diperoleh:

$$\begin{aligned}\angle PCQ &= d\psi \\ ds &= R \cdot d\psi \\ R &= \frac{ds}{d\psi} = \frac{dx}{d\psi}\end{aligned}$$

dengan menganggap $ds = dx$.

$$\frac{1}{R} = \frac{d\psi}{dx}$$

Kita tahu bahwa jika x dan y adalah koordinat pada titik P , maka:

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx}$$

Karena ψ adalah sudut yang sangat kecil, dengan mengambil $\tan \psi = \psi$,

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

karena $\frac{1}{R} = \frac{d\psi}{dx}$.

Maka:

$$\begin{aligned} \frac{M}{I} &= \frac{E}{R} \quad \text{atau} \quad M = EI \times \frac{1}{R} \\ M &= EI \times \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}$$

Catatan: persamaan di atas juga didasarkan atas momen bending. Efek gaya geser sangat kecil dibandingkan dengan momen bending sehingga bisa diabaikan.

4.3 Metode Untuk Kemiringan dan Defleksi Pada Penampang

Banyak metode untuk mencari kemiringan dan defleksi pada batang terbebani, namun dua metode berikut ini akan dibicarakan lebih lanjut, yaitu:

1. Metode integrasi ganda/lipat dua.
2. Metode Macaulay.

Metode pertama cocok untuk beban tunggal, sedangkan metode kedua cocok untuk beban banyak.

4.4 Metode Integral Ganda Untuk kemiringan dan Defleksi

Kita sudah mengetahui bahwa momen bending pada satu titik:

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan ini:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M$$

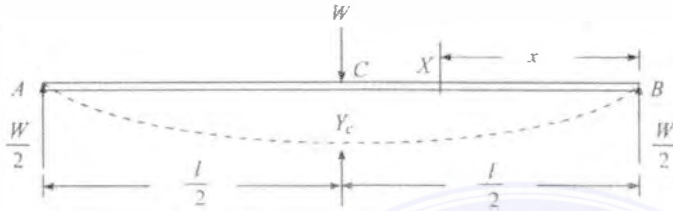
dan dengan mengintegrasikan persamaan di atas sekali lagi:

$$EI y = \int \int M$$

Jadi terlihat bahwa setelah integrasi pertama, diperoleh kemiringan pada satu titik, dan integrasi selanjutnya, diperoleh defleksi.

4.4. METODE INTEGRAL GANDA UNTUK KEMIRINGAN DAN DEFLEKSI 65

4.4.1 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Di Tengah



Gambar 4.3: Batang ditumpu sederhana dengan beban terpusat di tengah

Misalkan batang ditumpu sederhana AB dengan panjang l memikul beban terpusat W di tengah-tengahnya pada C seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.3. Dari geometri gambar, kita dapatkan reaksi pada A :

$$R_A = R_B = \frac{W}{2}$$

Misalkan penampang X dengan jarak x dari B . Momen bending pada daerah ini:

$$\begin{aligned} M_X &= R_B \cdot x = \frac{W}{2} x = \frac{Wx}{2} \\ EI \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{Wx}{2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Wx^2}{4} + C_1 \quad (4.5)$$

dimana C_1 adalah konstanta pertama integrasi. $x = \frac{l}{2}$, dan $\frac{dy}{dx} = 0$, dan mensubstitusikannya ke persamaan 4.5

$$0 = \frac{Wl^2}{16} + C_1 \quad \text{atau} \quad C_1 = -\frac{Wl^2}{16}$$

Dengan memasukkan harga C_1 ini ke persamaan 4.5:

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Wx^2}{4} - \frac{Wl^2}{16} \quad (4.6)$$

Persamaan ini adalah persamaan untuk mencari kemiringan pada penampang sembarang. Kemiringan maksimum pada B , dengan mensubstitusikan $x = 0$ pada persamaan 4.6:

$$EI \cdot i_B = -\frac{Wl^2}{16}$$

$$i_B = -\frac{Wl^2}{16EI}$$

tanda negatif artinya tangen pada B membuat sudut dengan AB negatif atau berlawanan arah jarum jam.

atau:

$$i_B = \frac{Wl^2}{16EI} \text{ radian}$$

Berdasarkan geometri batang:

$$i_B = \frac{Wl^2}{16EI} \text{ radian}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan 4.6 sekali lagi:

$$EI \cdot y = \frac{Wx^3}{12} - \frac{Wl^2x}{16} + C_2 \quad (4.7)$$

dimana C_2 adalah konstanta kedua integrasi. Jika $x = 0$ dan $y = 0$, mensubstitusikannya ke persamaan 4.7, kita peroleh $C_2 = 0$.

$$EI \cdot y = \frac{Wx^3}{12} - \frac{Wl^2x}{16} \quad (4.8)$$

merupakan persamaan defleksi pada posisi sembarang.

Dari konstruksi batang terlihat bahwa defleksi maksimum akan terdapat pada titik C atau $x = l/2$ sehingga:

$$EI \cdot y_C = \frac{W}{12} \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{Wl^2}{16} \left(\frac{l}{2}\right)$$

$$= \frac{Wl^3}{96} - \frac{Wl^3}{32} = -\frac{Wl^3}{48}$$

$$y_C = -\frac{Wl^3}{48EI}$$

tanda negatif menunjukkan defleksi ke bawah.

Contoh soal 4.1 Sebuah batang tumpuan sederhana dengan panjang span 3 m mendapat beban terpusat sebesar 10 kN. Carilah kemiringan dan defleksi maksimum pada batang. Ambil $I = 12 \times 10^6 \text{ mm}^4$ dan modulus elastisitas $E = 200 \text{ GPa}$.

4.4. METODE INTEGRAL GANDA UNTUK KEMIRINGAN DAN DEFLEKSI 67

Jawab.

Diketahui: $l = 3 \text{ m} = 3 \times 10^3 \text{ mm}$
 $W = 10 \text{ kN} = 10 \times 10^3 \text{ N}$
 $I = 12 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$

Kemiringan batang maksimum

$$i_A = \frac{Wl^2}{16EI} = \frac{(10 \times 10^3) \times (3 \times 10^3)^2}{16 \times (200 \times 10^3) \times (12 \times 10^6)} = 0,0023 \text{ rad}$$

Defleksi maksimum

$$y_C = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{(10 \times 10^3) \times (3 \times 10^3)^3}{48 \times (200 \times 10^3) \times (12 \times 10^6)} = 2,3 \text{ mm}$$

4.4.2 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Eksentrik

Misalkan suatu batang AB dengan tumpuan sederhana dengan panjang l dan memikul beban terpusat eksentrik W pada C seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.4. Dari geometri gambar tersebut, kita dapatkan reaksi pada A :

$$R_A = \frac{Wb}{l} \quad \text{atau} \quad R_B = \frac{Wa}{l}$$



Gambar 4.4: Penampang X pada CB .

Misalkan penampang X pada CB berada pada jarak x dari B , dimana x lebih kecil dari b ($x < b$). Momen bending pada penampang ini:

$$M_X = R_B \cdot x = \frac{Wax}{l}$$

sehingga

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Wax}{l}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Wax^2}{2l} + C_1 \quad (4.9)$$

dimana C_1 adalah konstanta integrasi. Pada C , $x = b$ dan $\frac{dy}{dx} = i_C$, maka:

$$EI \cdot i_C = \frac{Wab^2}{2l} + C_1$$

$$C_1 = (EI \cdot i_C) - \frac{Wab^2}{2l}$$

Dengan mensubstitusikan harga C_1 ke persamaan 4.9,

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Wax^2}{2l} + (EI \cdot i_C) - \frac{Wab^2}{2l} \quad (4.10)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas sekali lagi:

$$EI \cdot y = \frac{Wax^3}{6l} + (EI \cdot i_C \cdot x) - \frac{Wab^2x}{2l} + C_2$$

Pada $x = 0$ maka $y = 0$, sehingga didapat $C_2 = 0$, maka:

$$EI \cdot y = \frac{Wax^3}{6l} + (EI \cdot i_C \cdot x) - \frac{Wab^2x}{2l} \quad (4.11)$$

Persamaan 4.10 dan 4.11 adalah persamaan-persamaan yang dibutuhkan untuk mencari kemiringan dan defleksi pada sembarang titik pada penampang AC . Terlihat bahwa persamaan ini bisa digunakan hanya apabila harga i_C diketahui.



Gambar 4.5: Penampang X pada AC .

Misalkan penampang X pada AC pada jarak x dari B dimana x lebih besar dari b ($x > b$) seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.5. Momen bending pada penampang ini:

$$M_x = \frac{Wax}{l} - W(x - b)$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Wax}{l} - W(x - b) \quad (4.12)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

4.4. METODE INTEGRAL GANDA UNTUK KEMIRINGAN DAN DEFLEKSI 69

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Wax^2}{2l} - \frac{W(x-b)^2}{2} + C_3 \quad (4.13)$$

Pada C , $x = b$ dan $\frac{dy}{dx} = i_C$, maka:

$$EI \cdot i_C = \frac{Wab^2}{2l} + C_3$$

$$C_3 = (EI \cdot i_C) - \frac{Wab^2}{2l}$$

Dengan mensubstitusikan C_3 persamaan 4.13:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Wax^2}{2l} - \frac{W(x-b)^2}{2} + (EI \cdot i_C) - \frac{Wab^2}{2l} \quad (4.14)$$

Dengan mengintegrasikan sekali lagi persamaan di atas:

$$EI \cdot y = \frac{Wax^3}{6l} - \frac{W(x-b)^3}{6} + (EI \cdot i_C)x - \frac{Wab^2}{2l}x + C_4 \quad (4.15)$$

Pada $x = l$ maka $y = 0$ sehingga persamaan di atas menjadi:

$$0 = \frac{Wal^2}{6} - \frac{Wa^3}{6} - \frac{Wab^2}{2} + (EI \cdot i_C \cdot l) + C_4$$

karena $(x - b) = a$.

$$C_4 = \frac{Wab^2}{2} + \frac{Wa^3}{6} - \frac{Wal^2}{2} - (EI \cdot i_C \cdot l)$$

$$= \frac{Wab^2}{2} + \frac{Wa}{6}(a^2 - l^2) - (EI \cdot i_C \cdot l)$$

$$= \frac{Wab^2}{2} - \frac{Wa}{6}[(l+a)(l-a)] - (EI \cdot i_C \cdot l)$$

$$l^2 - a^2 = (l+a)(l-a)$$

$$C_4 = \frac{Wab^2}{2} - \frac{Wab}{6}(l+a) - (EI \cdot i_C \cdot l)$$

$$= \frac{Wab}{6}[3b - (l+a)] - (EI \cdot i_C \cdot l)$$

$$= \frac{Wab}{6}[3b - (a+b+a)] - (EI \cdot i_C \cdot l)$$

$$= \frac{Wab}{6}(2b - 2a) - (EI \cdot i_C \cdot l)$$

$$= \frac{Wab}{3}(b - a) - (EI \cdot i_C \cdot l)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan C_4 ke persamaan 4.15:

$$EI.y = \frac{Wax^3}{6l} - \frac{W(x-b)^3}{6} + (EI.i_C.x) - \frac{Wab^2x}{2l} + \frac{Wab}{3}(b-a) - (EI.i_C.l) \quad (4.16)$$

Persamaan 4.14 dan persamaan 4.16 adalah persamaan yang digunakan untuk mencari kemiringan dan defleksi pada sembarang titik pada penampang AC . Persamaan akan bisa dipakai hanya jika harga i_C diketahui. Untuk mendapatkan harga i_C , pertamanya kita cari defleksi pada C dari persamaan untuk penampang AC dan CB .

Substitusikan harga $x = b$ ke persamaan 4.12 dan menyamakannya dengan persamaan 4.16 sehingga:

$$\begin{aligned} \frac{Wab^3}{6l} + (EI.i_C.b) - \frac{Wab^3}{2l} &= \frac{Wab^3}{6l} - \frac{W(x-b)^3}{6} + (EI.i_C.b) - \frac{Wab^3}{2l} \\ &\quad + \frac{Wab^3}{3}(b-a) - (EI.i_C.l) \\ EI.i_C &= \frac{Wab^3}{3}(b-a) \end{aligned}$$

Substitusikan harga $EI.i_C$ ke persamaan 4.10

$$\begin{aligned} EI.\frac{dy}{dx} &= \frac{Wax^2}{2l} + \frac{Wab}{3l}(b-a) - \frac{Wab^2}{2l} \\ &= \frac{Wa}{6l}[3x^2 + 2b(b-a) - 3b^2] \\ &= \frac{Wa}{6l}(3x^2 - b^2 - 2ab) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Persamaan ini diperlukan untuk mencari kemiringan pada penampang BC . Kita tahu bahwa kemiringan maksimum terdapat pada B . Sehingga dengan memasukkan $x = 0$ ke persamaan 4.17, maka kemiringan pada B :

$$\begin{aligned} EI.i_B &= \frac{Wa}{6l}(-b^2 - 2ab) \\ &= -\frac{Wa}{6l}(b^2 + 2ab) \\ &= -\frac{Wab}{6l}(b + 2a) \\ &= -\frac{Wa}{6l}(l-a)(l+a) \\ &= \frac{Wa}{6l}(l^2 - a^2) \end{aligned}$$

4.4. METODE INTEGRAL GANDA UNTUK KEMIRINGAN DAN DEFLEKSI 71

dimana $a = l-b$ dan $a+b = l$. atau:

$$i_B = -\frac{Wa}{6EI.l}(l^2 - a^2)$$

tanda negatif menunjukkan bahwa tangen pada B membuat sudut dengan AB negatif atau berlawanan jarum jam.

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$i_A = \frac{Wb}{6EI.l}(l^2 - b^2)$$

Untuk defleksi pada sembarang titik pada AC , substitusikan harga $EI.i_C$ ke persamaan 4.11:

$$\begin{aligned} EI.y &= \frac{Wax^3}{6l} + \frac{Wab}{3l}(b-a)x - \frac{Wab^2x}{2l} \\ &= \frac{Wax}{6l}[x^2 + 2b(b-a) - 3b^2] \\ &= \frac{Wax}{6l}(x^2 + 2b^2 - 2ab - 3b^2) \\ &= \frac{Wax}{6l}(x^2 - b^2 - 2ab) \\ &= -\frac{Wax}{6l}[b(b+2a) - x^2] \\ &= -\frac{Wax}{6l}[(l-a)(l+a) - x^2] \\ &= -\frac{Wax}{6l}[l^2 - a^2 - x^2] \\ y &= -\frac{Wax}{6l.EI}[l^2 - a^2 - x^2] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tanda negatif menunjukkan defleksi ke bawah.

Untuk defleksi pada C , dengan substitusi $x = b$ ke persamaan di atas:

$$y_C = \frac{Wax}{6l.EI}(l^2 - a^2 - b^2)$$

Defleksi maksimum terjadi di daerah CB karena $b > a$. Untuk defleksi maksimum, substitusikan harga $\frac{dy}{dx} = 0$. Maka dengan menyamakan persamaan 4.17 dengan nol:

$$\begin{aligned} \frac{Wa}{6l}(3x^2 - b^2 - 2ab) &= 0 \\ 3x^2 - b(b+2ab) &= 0 \\ 3x^2 - (l-a)(l+b) &= 0 \end{aligned}$$

Kunjungi
Perpustakaan
Universitas Medan
Area untuk
Mendapatkan
Fulltext

Karena bagian CB adalah lurus, maka:

$$i_B = i_C = \frac{Wl_1^2}{2EI}$$

dan

$$y_C = \frac{Wl_1^3}{3EI}$$

Dari geometri pada gambar, kita dapatkan:

$$y_B = y_C + i_C(l - l_1) = \frac{Wl_1^3}{3EI} + \frac{Wl_1^2}{2EI}(l - l_1)$$

$$\text{Jika } l_1 = \frac{l}{2}, y_B = \frac{W}{3EI} \left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{W}{2EI} \left(\frac{l}{2}\right)^2 \times \frac{l}{2} = \frac{5Wl^3}{48EI}$$

Contoh soal 5.2 Sebuah batang kantilever dengan panjang 3 m mendapat beban terpusat sebesar 20 kN pada jarak 2 m dari ujung tetap. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang kantilever. Ambil harga $EI = 8 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2$.

Jawab:

Diketahui: $l = 3 \text{ m} = 3 \times 10^3 \text{ mm}$
 $W = 20 \text{ kN} = 20 \times 10^3 \text{ N}$
 $l_1 = 2 \text{ m} = 2 \times 10^3 \text{ mm}$
 $EI = 8 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2$

Kemiringan pada ujung bebas

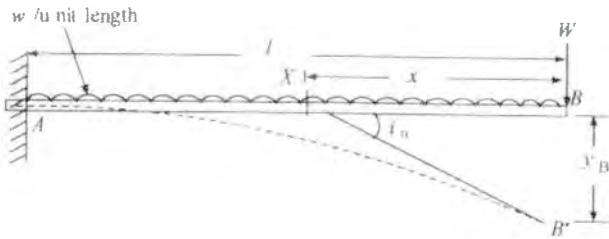
$$i_B = \frac{Wl_1^2}{2EI} = \frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{2 \times (8 \times 10^{12})} = 0,005 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas kantilever

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{Wl_1^3}{3EI} + \frac{Wl_1^2}{2EI}(l - l_1) \\ &= \left[\frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^3}{3 \times (8 \times 10^{12})} \right] \\ &\quad + \frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{2 \times (8 \times 10^{12})} [(3 \times 10^3) - (2 \times 10^3)] \\ &= 6,7 + 5,0 = 11,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

5.3 Kantilever Dengan Beban Terdistribusi Merata

Misalkan kantilever AB dengan panjang l mendapat beban terdistribusi merata w persatuan panjang seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.3. Misalkan penampang X pada jarak x dari ujung bebas B . Momen bending pada daerah ini:



Gambar 5.3: Beban terdistribusi merata.

$$M_x = -\frac{wx^2}{2}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + C_1$$

Jika $x = l$ maka $\frac{dy}{dx} = 0$. Substitusikan harga ini ke persamaan di atas:

$$0 = -\frac{wl^3}{6} + C_1 \quad \text{atau} \quad C_1 = \frac{wl^3}{6}$$

Substitusikan harga C_1 ke persamaan di atas, sehingga:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{wx^3}{6} + \frac{wl^3}{6} \quad (5.6)$$

Ini merupakan persamaan untuk mencari kemiringan pada sembarang titik. Untuk kemiringan maksimum, masukkan harga $x = 0$ pada persamaan 5.6:

$$EI \cdot i_B = \frac{wl^3}{6}$$

$$i_B = \frac{wl^3}{6EI} \quad \text{radian}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan 5.6 sekali lagi:

$$EI \cdot y = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wl^3x}{6} + C_2 \quad (5.7)$$

Pada $x = l$ maka $y = 0$. Substitusikan harga ini ke persamaan di atas:

$$0 = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wl^3x}{6} + C_2 \quad \text{atau} \quad C_2 = -\frac{wl^4}{8}$$

Substitusikan harga C_2 ke persamaan 5.7:

$$EI.y = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wl^3x}{6} - \frac{wl^4}{8} = \frac{wl^3x}{6} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^4}{8} \quad (5.8)$$

Ini adalah persamaan untuk mencari defleksi pada sembarang jarak x pada batang kantilever dengan beban terdistribusi merata. Defleksi maksimum terjadi pada ujung bebas. Karena itu untuk defleksi maksimum, substitusikan harga $x = 0$ pada persamaan 5.8:

$$\begin{aligned} EI.y_B &= -\frac{wl^4}{8} \\ y_B &= -\frac{wl^4}{8EI} \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan di atas bisa dinyatakan dalam beban total yaitu $W = wl$.

$$i_B = i_A = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{Wl^2}{6EI} \quad \text{dan} \quad y_B = -\frac{wl^4}{8EI} = -\frac{Wl^3}{8EI}$$

Contoh soal 5.3 Sebuah batang kantilever dengan panjang 2 m mendapat beban terdistribusi merata sebesar 5 kN/m pada keseluruhan panjangnya. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang kantilever. Ambil harga $EI = 2,5 \times 10^{12}$ N-mm².

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Diketahui: } l &= 2 \text{ m} = 2 \times 10^3 \text{ mm} \\ w &= 5 \text{ kN/m} = 5 \text{ N/mm} \\ EI &= 2,5 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2 \end{aligned}$$

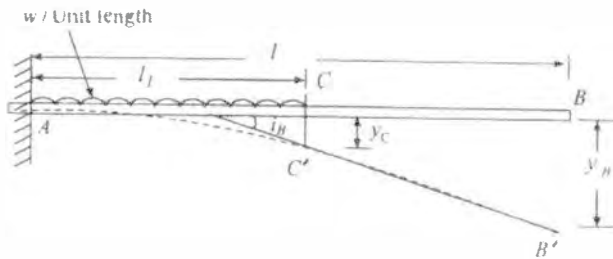
Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{5 \times (2 \times 10^3)^3}{6 \times (2,5 \times 10^{12})} = 0,0027 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas kantilever

$$y = \frac{wl^4}{8EI} = \frac{5 \times (2 \times 10^3)^4}{8 \times (2,5 \times 10^{12})} = 4,0 \text{ mm}$$

5.4. KANTILEVER TERBEBANI SEBAGIAN DENGAN BEBAN TERDISTRIBUSI MERATA85



Gambar 5.4: Beban terdistribusi merata pada sebagian kantilever.

5.4 Kantilever Terbebani Sebagian Dengan Beban Terdistribusi Merata

Misalkan kantilever AB dengan panjang l mendapat beban terdistribusi merata w persamaan panjang sepanjang l_1 dari ujung tetap, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.4. Bagian AC akan melengkung menjadi AC' , sedangkan bagian CB akan tetap lurus seperti yang ditunjukkan oleh $C'B'$, seperti ditunjukkan oleh gambar. Bagian AC dari kantilever sejenis dengan kantilever pada seksi 5.3.

$$i_C = \frac{wl_1^3}{6EI} \text{ rad}$$

Karena bagian CB dari kantilever lurus, sehingga:

$$i_B = i_C = \frac{wl_1^3}{6EI}$$

dan

$$y_C = \frac{wl_1^4}{8EI}$$

Dari geometri gambar, kita peroleh:

$$y_B = y_C + i_C(l - l_1) = \frac{Wl_1^4}{8EI} + \frac{Wl_1^3}{6EI}(l - l_1)$$

$$\text{Jika } l_1 = \frac{l}{2}, y_B = \frac{w}{8EI} \left(\frac{l}{2}\right)^4 + \frac{w}{6EI} \left(\frac{l}{2}\right)^3 \times \frac{l}{2} = \frac{7wl^4}{384EI}$$

Contoh soal 5.4 Sebuah batang kantilever dengan panjang 2,5 m mendapat beban terdistribusi sebagian sebesar 10 kN/m sepanjang 1,5 m dari ujung tetap. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang kantilever. Ambil harga rigiditas fleksural sebesar $1,9 \times 10^{12}$ N-mm².

Jawab:

Diketahui: $l = 2,5 \text{ m} = 2,5 \times 10^3 \text{ mm}$
 $w = 10 \text{ kN/m} = 10 \text{ N/mm}$
 $l_1 = 1,5 \text{ m} = 1,5 \times 10^3 \text{ mm}$
 $EI = 1,9 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2$

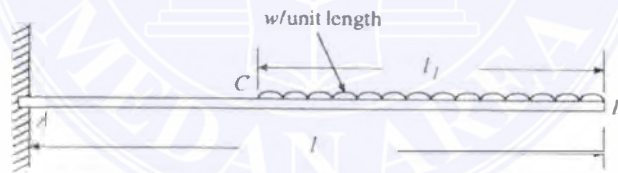
Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{wl_1^3}{6EI} = \frac{10 \times (1,5 \times 10^3)^3}{6 \times (1,9 \times 10^{12})} = 0,003 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas kantilever

$$\begin{aligned} y &= \frac{wl_1^4}{8EI} + \frac{wl_1^3}{6EI} [l - l_1] \\ &= \frac{10 \times (1,5 \times 10^3)^4}{8 \times (1,9 \times 10^{12})} + \frac{10 \times (1,5 \times 10^3)^3}{6 \times (1,9 \times 10^{12})} \\ &\quad \times [(2,5 \times 10^3) - (1,5 \times 10^3)] \\ &= 3,3 + 3 = 6,3 \text{ mm} \end{aligned}$$

5.5 Kantilever Dibebani Dari Ujung Bebas

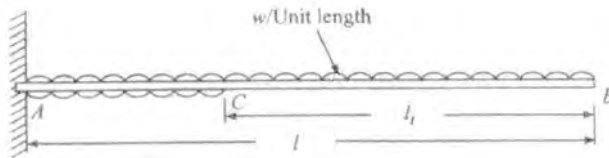


Gambar 5.5:

Misalkan kantilever AB dengan panjang l mendapat beban terdistribusi merata w per satuan panjang sepanjang l_1 dari ujung bebas seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.5.

Kemiringan dan defleksi kantilever dalam hal ini bisa dicari sebagai berikut:

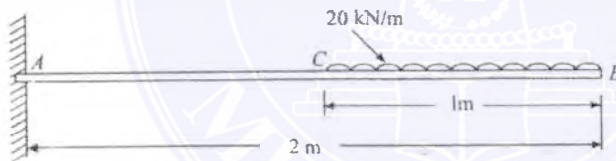
1. Pertama-tama, misalkan keseluruhan kantilever dari AB dibebani dengan beban terdistribusi merata w per satuan panjang seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.6
2. Tambahkan beban terdistribusi merata w persatuan panjang dari A ke C seperti gambar 5.6.



Gambar 5.6:

3. Kemudian cari kemiringan dan defleksi karena beban tersebut seperti telah dijelaskan pada seksi 5.3 dan 5.4.
4. Kemudian kemiringan pada B adalah sama dengan kemiringan karena beban total dikurangi dengan kemiringan karena beban tambahan.
5. Dengan cara yang sama, defleksi pada B adalah sama dengan defleksi karena beban total dikurangi dengan defleksi karena beban tambahan.

Contoh soal 5.5 Sebuah kantilever dengan lebar 75 mm dan tinggi 200 mm dibebani seperti ditunjukkan oleh gambar 5.7. Carilah kemiringan dan defleksi pada B . Ambil $E = 200$ GPa.



Gambar 5.7:

Jawab:

Diketahui: $b = 75$ mm
 $d = 200$ mm
 $w = 20$ kN/m = 20 N/mm
 $l = 2$ m = 2×10^3 mm
 $l_1 = 1$ m = 1×10^3 mm
 $E = 200$ GPa = 200×10^3 N/mm²

Kemiringan pada B

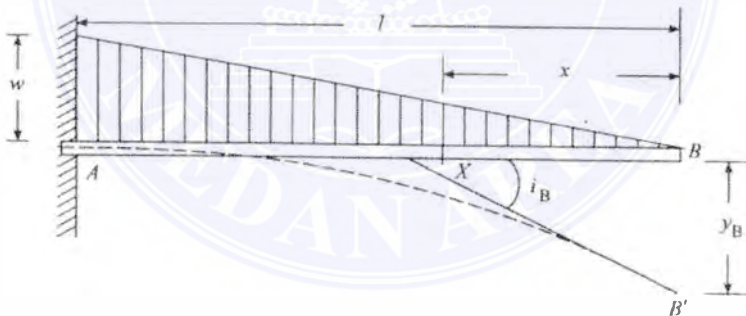
$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{75 \times (200)^3}{12} = 50 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\begin{aligned}
 i_B &= \left[\frac{wl^3}{6EI} \right] - \left[\frac{w(l-l_1)^3}{6EI} \right] \\
 &= \left[\frac{20 \times (2 \times 10^3)^3}{6 \times (200 \times 10^3) \times (50 \times 10^6)} \right] - \left[\frac{20[(2 \times 10^3) - (1 \times 10^3)]^3}{6 \times (200 \times 10^3) \times (50 \times 10^6)} \right] \\
 &= 0,00267 - 0,000333 = 0,00234 \text{ rad}
 \end{aligned}$$

Defleksi pada B

$$\begin{aligned}
 y_B &= \left[\frac{wl^4}{8EI} \right] - \left[\frac{w(l-l_1)^4}{8EI} + \frac{w(l-l_1)^3 l_1}{6EI} \right] \\
 &= \left[\frac{20 \times (2 \times 10^3)^4}{8 \times (200 \times 10^3) \times (50 \times 10^6)} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{20 \times [(2 \times 10^3) - (1 \times 10^3)]^4}{8 \times (200 \times 10^3) \times (50 \times 10^6)} + \frac{20 \times [(2 \times 10^3) - (1 \times 10^3)]^3 (1 \times 10^3)}{6 \times (200 \times 10^3) \times (50 \times 10^6)} \right] \\
 &= 4,0 - 0,58 = 3,42 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

5.6 Kantilever Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual



Gambar 5.8:

Misalkan kantilever AB dengan panjang l mendapat beban bervariasi secara gradual dari nol pada B hingga w persatuan panjang ada A seperti yang ditunjukkan oleh gambar 5.8.

Sekarang misalkan penampang X pada jarak x dari ujung bebas. Momen bending pada bidang ini:

$$M_X = -\frac{1}{2} \times \frac{wx}{l} \times x \times \frac{x}{3} = -\frac{wx^3}{6l}$$

5.6. KANTILEVER DENGAN BEBAN BERVARIASI SECARA GRADUAL 89

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^3}{6l} \quad (5.9)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan di atas:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{wx^4}{24l} + C_1 \quad (5.10)$$

Pada $x = l$ maka $\frac{dy}{dx} = 0$. Substitusikan harga ini ke persamaan di atas:

$$0 = -\frac{wl^4}{24l} + C_1 \quad \text{atau} \quad C_1 = \frac{wl^3}{24}$$

sehingga:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{wx^4}{24l} + \frac{wl^3}{24} \quad (5.11)$$

Ini merupakan persamaan untuk mencari kemiringan pada sembarang titik. Kemiringan maksimum akan terjadi pada ujung bebas dimana $x = 0$, sehingga kemiringan maksimum:

$$EI \cdot i_B = \frac{wl^3}{24}$$

$$i_B = \frac{wl^3}{24EI} \quad \text{radian}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan 5.13:

$$EI \cdot y = -\frac{wx^5}{120l} + \frac{wl^3x}{24} + C_2 \quad (5.12)$$

Pada $x = l$ maka $y = 0$. Masukkan harga ini ke persamaan di atas:

$$0 = -\frac{wl^4}{120l} + \frac{wl^4}{24} + C_2 \quad \text{atau} \quad C_2 = -\frac{wl^4}{30}$$

$$EI \cdot y = -\frac{wx^5}{120l} + \frac{wl^3x}{24} - \frac{wl^4}{30} \quad (5.13)$$

Ini adalah persamaan untuk mencari defleksi pada sembarang titik. Defleksi maksimum akan terjadi pada ujung bebas. Dengan mensubstitusikan $x = 0$ pada persamaan di atas maka defleksi maksimum:

$$EI \cdot y_B = -\frac{wl^4}{30}$$

$$y_B = -\frac{wl^4}{30EI}$$

Contoh soal 5.6 Sebuah kantilever mempunyai span memikul beban segitiga dari intensitas nol pada ujung bebas hingga 100 kN/m pada ujung tetap. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas. Ambil $I = 100 \times 10^3 \text{ mm}^4$ dan $E = 200 \text{ GPa}$

Jawab:

Diketahui: $l = 2 \text{ m} = 2 \times 10^3 \text{ mm}$
 $w = 100 \text{ kN/m} = 100 \text{ N/mm}$
 $I = 100 \times 10^6 \text{ mm}^4$
 $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$

Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{wl^3}{24EI} = \frac{100 \times (2 \times 10^3)^3}{24 \times (200 \times 10^3) \times (100 \times 10^6)} = 0,00167 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas kantilever

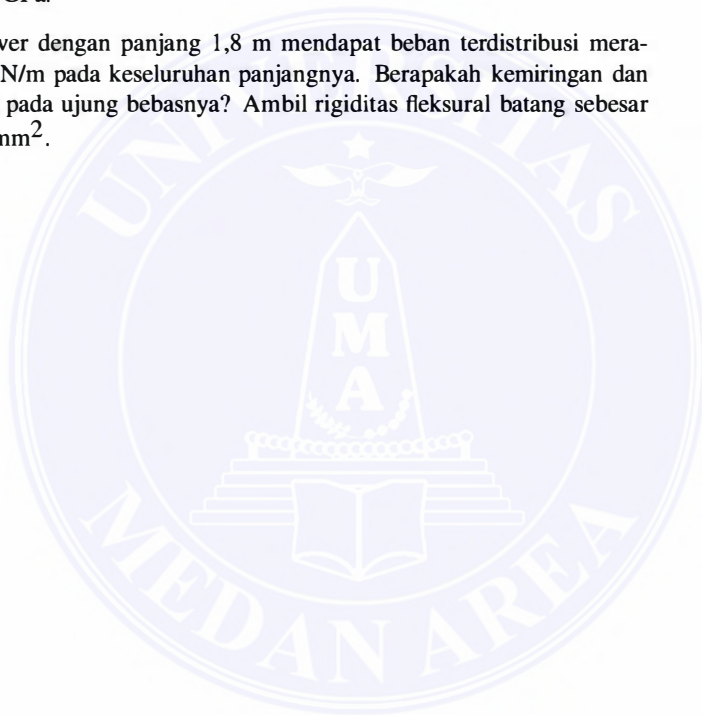
$$y = \frac{wl^4}{30EI} = \frac{100 \times (2 \times 10^3)^4}{30 \times (200 \times 10^3) \times (100 \times 10^6)} = 2,67 \text{ mm}$$

5.7 Kantilever Dengan Beberapa Beban

Jika kantilever mendapat beberapa beban terpusat atau terdistribusi merata, kemiringan dan defleksi pada titik tertentu pada kantilever merupakan penjumlahan aljabar dari kemiringan dan defleksi pada titik tersebut karena beban-beban yang bekerja secara individu.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah kantilever dengan panjang 2,4 m mendapat beban terpusat sebesar 30 kN pada ujung bebasnya. Carilah kemiringan dan defleksi kantilever tersebut. Rigiditas fleksural kantilever adalah 25×10^{12} N-mm².
2. Sebuah kantilever dengan lebar 150 mm dan tinggi 200 mm menonjol dengan panjang 1,5 m dari dinding. Carilah kemiringan dan defleksi kantilever pada ujung bebas jika ia mendapat beban terpusat sebesar 50 kN pada ujung bebasnya. Ambil $E = 200$ GPa.
3. Sebuah kantilever dengan panjang 1,8 m mendapat beban terdistribusi merata sebesar 10 kN/m pada keseluruhan panjangnya. Berapakah kemiringan dan defleksi batang pada ujung bebasnya? Ambil rigiditas fleksural batang sebesar $3,2 \times 10^{12}$ N-mm².





Bab 6

Defleksi Dengan Metode Momen Luas

Pada pembahasan sebelumnya kita telah bicarakan tentang kemiringan dan defleksi dari berbagai jenis batang dan kantilever. Penurunan rumus untuk kemiringan dan defleksi tersebut sulit dan panjang. Tetapi pada bab ini kita akan membicarakan metode grafik untuk mencari kemiringan dan defleksi batang dan kantilever, dimana metode ini cukup sederhana dan memberikan jawaban yang lebih cepat. Metode ini terkenal dengan nama metode momen luas, yang didasarkan atas teori Mohr.

Defleksi batang dan kantilever dengan metode momen luas didasarkan atas dua teori yang diberikan oleh Mohr:

Teori Mohr I. Perubahan kemiringan antara dua titik, pada sebuah kurva elastis adalah sama dengan luas netto diagram momen bending antara titik ini dibagi dengan EI.

Teori Mohr II. Perpotongan dengan garis referensi vertikal tangen pada dua titik sembarang pada sebuah kurva elastis adalah sama dengan momen pada diagram momen bending antara dua titik ini pada garis referensi dibagi dengan EI.

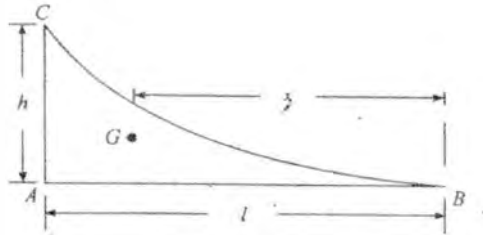
6.1 Luas dan Posisi Pusat Gravitasi Parabola

Sebuah parabola didefinisikan sebagai sebuah gambar yang mempunyai minimal sebuah sisi kurva parabola. Pada gambar 6.1, sisi *CB* adalah kurva parabola, dimana *AB* dan *AC* adalah garis lurus.

Kurva parabola secara umum dinyatakan dengan rumus kx^n , dimana n adalah derajat kurva parabolik. Tabel berikut memberikan luas dan posisi dai berbagai derajat kurva parabola cekung.

Harga luas (A) dan jarak (x) bisa dinyatakan oleh persamaan berikut:

$$(A) = (l \times h) \times \frac{1}{n+1}$$



Gambar 6.1: Parabola cekung.

Tabel 6.1:

No.	Harga n	Luas (A)	Jarak antara B dan G (x)
1	2	$(l \times h) \times \frac{1}{3}$	$l \times \frac{3}{4}$
2	3	$(l \times h) \times \frac{1}{4}$	$l \times \frac{4}{5}$
3	4	$(l \times h) \times \frac{1}{5}$	$l \times \frac{5}{6}$

dan jarak

$$(x) = l \times \frac{n+1}{n+2}$$

6.2 Batang Tumpuan Sederhana dengan Beban Terpusat Di Tengah

Misalkan sebuah batang tumpuan sederhana AB dengan panjang l dan mendapat beban terpusat W pada C yaitu tengah-tengah batang seperti ditunjukkan oleh gambar 6.2 (a). Reaksi pada A:

$$R_A = R_B = \frac{W}{2}$$

Momen bending pada A karena reaksi R_B :

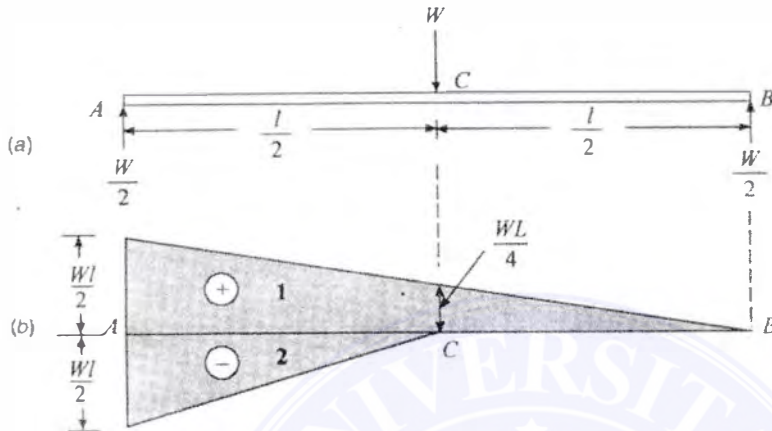
$$M_1 = +\frac{Wl}{2}$$

Dengan cara yang sama, momen bending pada A karena beban W :

$$M_2 = -W \times \frac{l}{2} = -\frac{Wl}{2}$$

Sekarang gambarlah diagram momen bending dengan kedua momen di atas. Momen bending positif digambar di atas garis rujukan, dan momen negatif dibawahnya,

6.2. BATANG TUMPUAN SEDERHANA DENGAN BEBAN TERPUSAT DI TENGAH⁹⁵



Gambar 6.2: Batang tumpuan sederhana dengan beban terpusat di tengah.

seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.2 (b). Diagram momen bending ini disebut *diagram momen bending komponen*.

Sekarang, untuk mencari kemiringan pada B, misalkan diagram momen bending dari C ke B. Luas diagram momen bending dari C ke B:

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{Wl}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{Wl^2}{16}$$

dan jarak pusat gravitasi diagram momen bending dari B:

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} = \frac{l}{3}$$

$$i_B = \frac{A}{EI} = \frac{Wl^2}{16EI}$$

Berdasarkan geometri batang:

$$i_A = \frac{Wl^2}{16EI}$$

dan

$$y_C = \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl^2}{16} \times \frac{l}{3}}{EI} = \frac{Wl^3}{48EI}$$

Metode Alternatif

Kita tahu bahwa momen bending nol pada A dan B dan menaik secara garis lurus hingga $\frac{Wl}{4}$ pada C. Karena itu luas diagram momen bending dari C ke B:

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{Wl}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{Wl^2}{16}$$

Contoh soal 6.1 Sebuah batang dengan tumpuan sederhana mempunyai panjang 2 m mendapat beban terpusat 20 kN pada tengah-tengah batang. Carilah kemiringan dan defleksi batang. Ambil rigiditas fleksural batang sebesar $500 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$.

Jawab:

Diketahui: $l = 2 \text{ m} = 2 \times 10^3 \text{ mm}$
 $W = 20 \text{ kN/m} = 20 \times 10^3 \text{ N}$
 $EI = 500 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{mm}^2$

Kemiringan maksimum batang

$$i_B = \frac{Wl^2}{16EI} = \frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{16 \times (500 \times 10^9)} = 0,01 \text{ rad}$$

Defleksi maksimum batang

$$y_C = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{(20 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^3}{48 \times (500 \times 10^9)} = 6,67 \text{ mm}$$

6.3 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terpusat Eksentrik

Misalkan batang tumpuan sederhana AB dengan panjang l mendapat beban terpusat W pada C sedemikian sehingga $AC = a$ dan $CB = b$ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.3 (a). Reaksi pada A :

$$R_A = \frac{Wb}{l} \quad \text{dan} \quad R_B = \frac{Wa}{l}$$

dan momen bending pada A karena reaksi R_B :

$$M_1 = +\frac{Wa}{l} \times l = +Wa$$

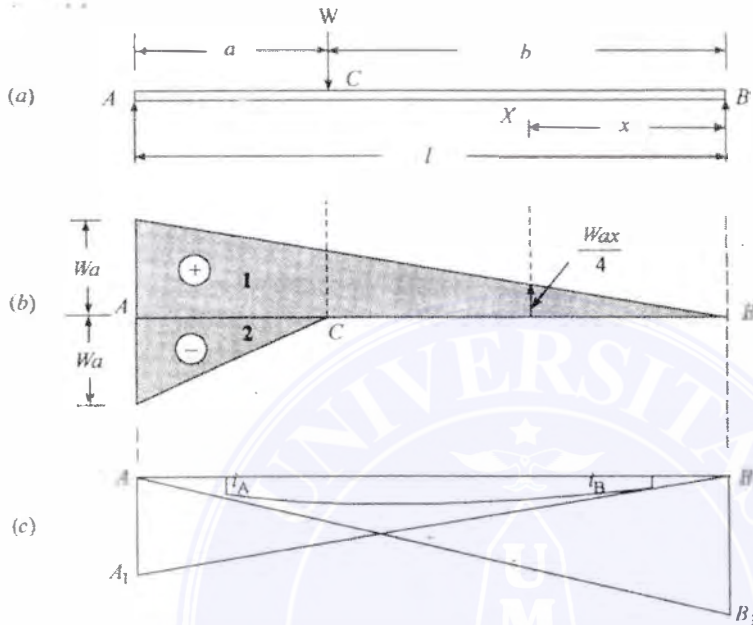
dan

$$M_2 = -Wa$$

Sekarang gambarlah diagram momen bending gabungan seperti yang diperlihatkan oleh gambar 6.3 (b). Luas diagram momen bending positif:

$$A_1 = \frac{1}{2} \times Wa \times l = \frac{Wal}{2}$$

6.3. BATANG TUMPUAN SEDERHANA DENGAN BEBAN TERPUSAT EKSENTRIK 97



Gambar 6.3: Beban terpusat eksentrik.

dan luas diagram momen bending negatif:

$$A_2 = \frac{1}{2} \times Wa \times a = \frac{Wa^2}{2}$$

Dari geometri pembebanan, terlihat bahwa kemiringan pada sembarang penampang tidak diketahui. Karena itu kemiringan dan defleksi tidak bisa langsung dicari. Sekarang gambar garis vertikal melalui A dan B. Misalkan AA₁ dan BB₁ sama dengan perpotongan tangen pada A dan B seperti ditunjukkan oleh gambar 6.3 (c).

$$AA_1 = i_B \times l$$

tetapi

$$AA_1 = \frac{A_1x_1 - A_2x_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{Wal}{2} \times \frac{l}{3} \right) - \left(\frac{Wa^2}{2} \times \frac{a}{3} \right) \right] = \frac{Wa}{6EI} (l^2 - a^2)$$

$$i_B = \frac{AA_1}{l} = \frac{Wa}{6EI} (l^2 - a^2)$$

dengan cara yang sama:

$$i_A = \frac{Wb}{6EI} (l^2 - b^2)$$

Misalkan sembarang penampang X pada jarak x dari B . Luas diagram momen bending antara X dan B :

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{Wax}{l} \times x = \frac{Wax^2}{2l} \quad (6.1)$$

Perubahan kemiringan antara X dan B :

$$= \frac{A}{EI} = \frac{Wax^2}{2lEI} \quad (6.2)$$

Untuk defleksi maksimum, kemiringan pada X harus sama dengan nol, atau dengan kata lain perubahan kemiringan antara B dan X harus sama dengan kemiringan pada B :

$$\begin{aligned} \frac{Wa}{6lEI}(l^2 - a^2) &= \frac{Wax^2}{2lEI} \\ x^2 &= \frac{(l^2 - a^2)}{3} \quad \text{atau} \quad x = \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}} \end{aligned}$$

Kita lihat bahwa pada persamaan 6.1 luas diagram momen bending antara X dan B :

$$A = \frac{Wax^2}{2l}$$

dan jarak gravitas diagram momen bending dari B :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2x}{3} \\ y_x &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wax^2}{2l} \times \frac{2x}{3}}{EI} = \frac{Wax^3}{3EI} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Untuk mendapatkan defleksi maksimum, substitusikan harga $x = \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}}$ ke persamaan 6.3:

$$y_{max} = \frac{Wa}{3EI} \left(\sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}} \right)^3 = \frac{Wa}{9\sqrt{3}EI} (l^2 - a^2)^{3/2}$$

Contoh soal 6.2 Batang dengan tumpuan sederhana mempunyai panjang 2,8 m mendapat beban terpusat sebesar 60 kN pada jarak 1 m dari tumpuan kiri A . Pada lokasi mana terjadi defleksi maksimum? Cari juga besarnya defleksi di bawah beban. Ambil EI batang sebesar 4×10^{12} N-mm².

Jawab:

Diketahui: $l = 2,8 \text{ m} = 2,8 \times 10^3 \text{ mm}$
 $W = 60 \text{ kN} = 60 \times 10^3 \text{ N}$
 $a = 1 \text{ m} = 1 \times 10^3 \text{ mm}$
 $EI = 4 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2$

6.4. BATANG TUMPUAN SEDERHANA DENGAN BEBAN TERDISTRIBUSI MERATA

Posisi defleksi maksimum

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{3}} = \sqrt{\frac{(2,8 \times 10^3)^2 - (1 \times 10^3)^2}{3}} \\
 &= 1,51 \times 10^3 \text{ mm} = 1,51 \text{ m}
 \end{aligned}$$

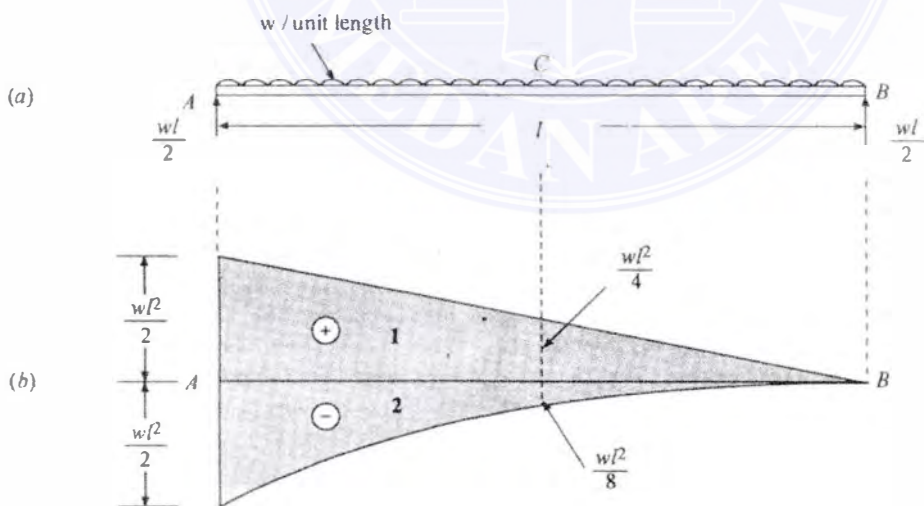
Besarnya defleksi di bawah beban

$$b = l - a = (2,8 \times 10^3) - (1 \times 10^3) = 1,8 \times 10^3 \text{ m}$$

dan besarnya defleksi di bawah beban:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{Wab}{6EI} (l^2 - a^2 - b^2) \\
 &= \frac{(60 \times 10^3) \times (1 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)}{6 \times (4 \times 10^{12}) \times (2,8 \times 10^3)} \\
 &\quad \times [(2,8 \times 10^3)^2 - (1 \times 10^3)^2 - (1,8 \times 10^3)^2] \\
 &= (1,61 \times 10^{-6}) \times (3,6 \times 10^6) = 5,8 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

6.4 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Terdistribusi Merata



Gambar 6.4: Beban terdistribusi merata.

Misalkan batang tumpuan sederhana AB dengan panjang l mendapat beban terdistribusi merata w per satuan panjang seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.4 (a). Reaksi pada A :

$$R_A = R_B = \frac{wl}{2}$$

dan momen bending pada A karena reaksi R_B :

$$M_1 = \frac{wl}{2} \times l = \frac{wl^2}{2}$$

Dengan cara yang sama, momen bending pada A karena beban w :

$$M_2 = -\frac{wl}{2} \times \frac{l}{2} = -\frac{wl^2}{2}$$

Sekarang gambarlah kedua momen bending seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.4 (b). Luas diagram momen bending positif antara C dan B :

$$A_1 = +\frac{1}{2} \times \frac{wl^2}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{wl^3}{16}$$

dan luas diagram momen bending negatif antara C dan B :

$$A_2 = \frac{1}{3} \times \frac{wl^2}{8} \times \frac{l}{2} = \frac{wl^3}{48}$$

Luas netto diagram momen bending:

$$A = A_1 - A_2 = \frac{wl^3}{16} - \frac{wl^3}{48} = \frac{wl^3}{24}$$

dan jarak pusat gravitasi dari diagram momen bending positif pada CB dari B :

$$x_1 = \frac{2}{3} \times \frac{l}{2} = \frac{l}{3}$$

Dengan cara yang sama, jarak diagram momen bending negatif pada CB dari B :

$$\bar{x} = \frac{3}{4} \times \frac{l}{2} = \frac{3l}{8}$$

maka:

$$i_B = \frac{A}{EI} = \frac{wl^3}{24EI}$$

dan

$$i_A = \frac{wl^3}{24EI}$$

6.5. BATANG TUMPUAN SEDERHANA DENGAN BEBAN BERVARIASI SECARA GRADUAL 101

dan

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{A_1\bar{x}_1 - A_2\bar{x}_2}{EI} = \frac{\left(\frac{wl^3}{16} \times \frac{l}{3}\right) - \left(\frac{wl^3}{48} \times \frac{3l}{8}\right)}{EI} \\ &= \frac{5wl^4}{384EI} \end{aligned}$$

Contoh soal 6.3 Batang tumpuan sederhana dengan span 2,4 m mendapat beban terdistribusi merata 6 kN/m di keseluruhan batang. Hitunglah kemiringan dan defleksi maksimum pada batang jika rigiditas fleksural adalah 8×10^{12} N-mm².

Jawab:

Diketahui: $l = 2,4 \text{ m} = 2,4 \times 10^3 \text{ mm}$
 $w = 6 \text{ kN/m} = 6 \text{ N/mm}$
 $EI = 8 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2$

Kemiringan batang

$$i_A = \frac{wl^3}{24EI} = \frac{6 \times (2,4 \times 10^3)^3}{24 \times (8 \times 10^{12})} = 0,00043 \text{ rad}$$

Defleksi batang

$$y_C = \frac{wl^3}{384EI} = \frac{5 \times 6 \times (2,4 \times 10^3)^4}{384 \times (8 \times 10^{12})} = 0,324 \text{ mm}$$

6.5 Batang Tumpuan Sederhana Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual

Misalkan batang tumpuan sederhana AB dengan panjang l mendapat beban bervariasi secara bertahap dari nol pada B hingga w per satuan panjang pada A seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.5 (a). Reaksi pada tumpuan:

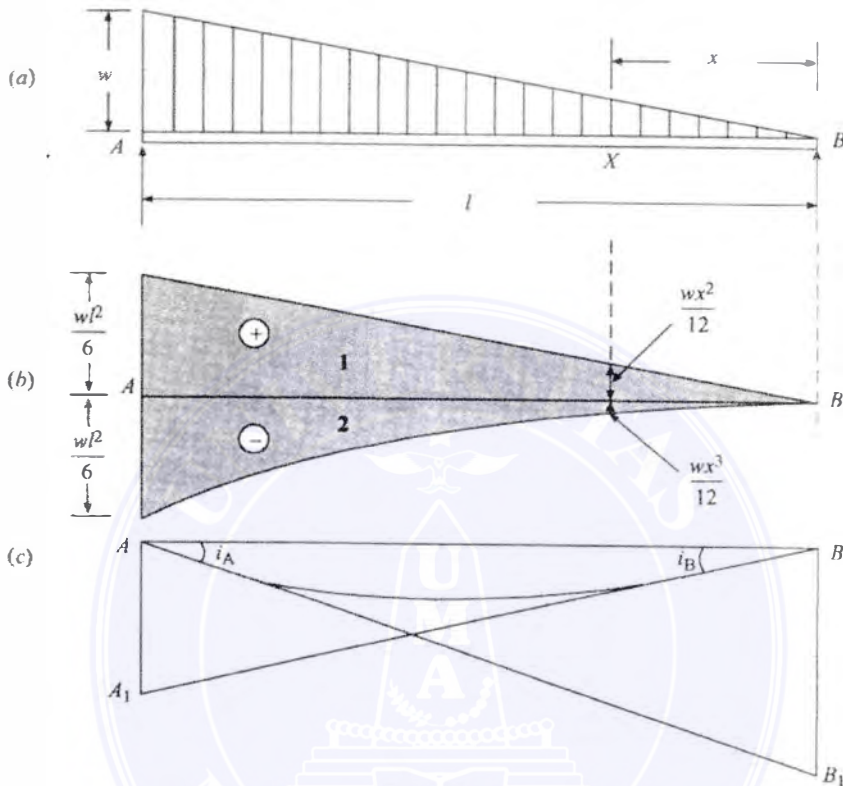
$$R_A = \frac{wl}{3} \quad \text{dan} \quad R_B = \frac{wl}{6}$$

Momen bending pada A karena reaksi R_B :

$$M_1 = \frac{wl}{6} \times l = \frac{wl^2}{6}$$

Dengan cara yang sama, momen bending pada A karena beban:

$$M_2 = -\frac{wl}{2} \times \frac{l}{3} = -\frac{wl^2}{6}$$



Gambar 6.5:

Sekarang gambarlah kedua diagram momen ini, seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.5 (a).

Luas diagram momen positif:

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{wl^2}{6} \times l = \frac{wl^3}{12}$$

dan luas diagram momen bending negatif:

$$A_2 = \frac{1}{4} \times \frac{wl^2}{6} \times l = \frac{wl^3}{24}$$

Dari geometri pembebanan, terlihat bahwa kemiringan pada sembarang penampang tidak diketahui. Sehingga kemiringan dan defleksi tidak bisa dicari secara langsung. Sekarang gambarlah garis vertikal melalui A dan B . Misalkan AA_1 dan BB_1 yang besarnya sama dengan perpotongan tangen pada A dan B , seperti yang diprllihatkan oleh gambar 6.5 (c).

6.5. BATANG TUMPUAN SEDERHANA DENGAN BEBAN BERVARIASI SECARA GRADUAL 103

$$AA_1 = i_B \times l \quad \text{dan} \quad BB_1 = i_A \times l$$

Tetapi

$$AA_1 = \frac{A_1 \bar{x}_1 - A_2 \bar{x}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{wl^3}{2} \times \frac{l}{3} \right) - \left(\frac{wl^3}{24} \times \frac{l}{5} \right) \right] = \frac{7wl^4}{360EI}$$

$$i_B = \frac{7wl^4}{360EI} \text{ radian}$$

Dengan cara yang sama:

$$BB_1 = \frac{A_1 \bar{x}_1 - A_2 \bar{x}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{wl^3}{12} \times \frac{2l}{3} \right) - \left(\frac{wl^3}{24} \times \frac{4l}{5} \right) \right] = \frac{wl^4}{45EI}$$

$$i_A = \frac{wl^4}{45EI} \text{ radian}$$

Sekarang, misalkan penampang X pada jarak x dari B. Kita peroleh bahwa luas diagram momen bending antara X dan B:

$$A = \left(\frac{1}{2} \times \frac{wlx}{62} \times x \right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{wx^3}{6l} \times x \right) = \frac{wlx^2}{12} - \frac{wx^4}{24l}$$

kemiringan pada X:

$$i_x = \frac{A}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{wlx^2}{12} - \frac{wx^4}{24l} \right)$$

$$7l^4 = 30lx^2 - \frac{15x^4}{l}$$

$$x = 0,519l$$

Defleksi pada X:

$$y_C = \frac{A_1 \bar{x}_1 - A_2 \bar{x}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{wlx^2}{12} \times \frac{2x}{3} \right) - \left(\frac{wx^4}{24l} \times \frac{4x}{5} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{wlx^3}{18} - \frac{wx^5}{30l} \right]$$

Defleksi pada tengah batang, dimana $x = l/2$:

$$y_C = \frac{0,00651wl^4}{EI}$$

Defleksi maksimum terjadi pada $x = 0,519l$:

$$y_{max} = \frac{0,00652wl^4}{EI}$$

Contoh soal 6.4 Batang tumpuan sederhana dengan span 3,6 m mendapat beban segitiga 3 kN/m pada A dan nol pada B. . Hitunglah kemiringan pada A dan B. Ambil harga rigiditas fleksural 6×10^{12} N-mm².

Jawab:

Diketahui: $l = 3,6 \text{ m} = 3,6 \times 10^3 \text{ mm}$
 beban pada $A = w = 3 \text{ kN/m} = 3 \text{ N/mm}$
 $EI = 6 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2$

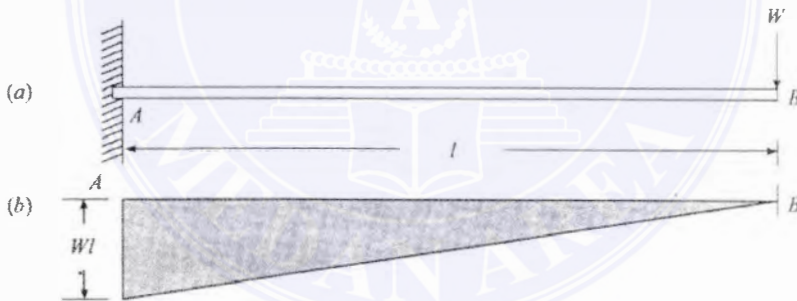
Kemiringan pada A

$$i_A = \frac{wl^3}{45EI} = \frac{3 \times (3,6 \times 10^3)^3}{45 \times (6 \times 10^{12})} = 0,00052 \text{ rad}$$

Kemiringan pada B

$$i_B = \frac{7wl^3}{360EI} = \frac{7 \times 3 \times (3,6 \times 10^3)^3}{360 \times (6 \times 10^{12})} = 0,00045 \text{ mm}$$

6.6 Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Ujung Bebasnya



Gambar 6.6: Beban terpusat pada ujung bebas.

Misalkan batang tumpuan sederhana AB dengan panjang l mendapat beban terpusat W pada ujung bebasnya seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.6 (a). Momen bending akan nol pada B dan menaik menurut garis lurus hingga Wl seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.6 (b).

Luas diagram momen bending:

$$A = \frac{1}{2} \times Wl \cdot l = \frac{Wl^2}{2}$$

dan jarak antara pusat gravitasi diagram momen bending dengan B :

6.7. KANTILEVER DENGAN BEBAN TERPUSAT PADA SEMBARANG TITIK 105

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2l}{3} \\ i_B &= \frac{A}{EI} = \frac{Wl^2}{2EI} \text{ radian} \\ y_B &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl^2}{2} \times \frac{2l}{3}}{EI} = \frac{Wl^3}{3EI}\end{aligned}$$

Contoh soal 6.5 Batang kantilever dengan span 2,0 m mendapat beban terpusat sebesar 30 kN pada ujung bebasnya. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas. Ambil harga EI sebesar 8×10^{12} N-mm².

Jawab:

Diketahui: $l = 2 \text{ m} = 2 \times 10^3 \text{ mm}$
 $W = 30 \text{ kN} = 30 \times 10^3 \text{ N}$
 $EI = 8 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2$

Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{Wl^2}{2EI} = \frac{(30 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^2}{2 \times (8 \times 10^{12})} = 0,0075 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas

$$y_B = \frac{Wl^3}{3EI} = \frac{(30 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)^3}{3 \times (8 \times 10^{12})} = 10 \text{ mm}$$

6.7 Kantilever Dengan Beban Terpusat Pada Sembarang Titik

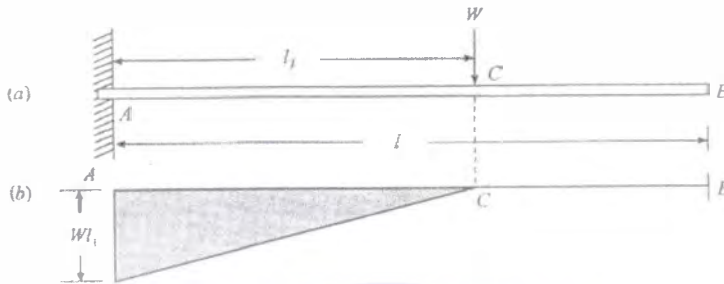
Misalkan batang tumpuan sederhana AB dengan panjang l mendapat beban terpusat W pada jarak l_1 dari ujung tetap seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.7 (a). Momen bending akan nol pada B dan C dan akan menaik menurut garis lurus hingga Wl pada A seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.7 (b).

Luas diagram momen bending:

$$A = \frac{1}{2} \times Wl_1 \cdot l_1 = \frac{Wl_1^2}{2}$$

dan jarak antara pusat gravitasi diagram momen bending dengan B :

$$\bar{x} = \frac{2l_1}{3} + (l - l_1)$$



Gambar 6.7: Beban terpusat tidak pada ujung.

$$i_B = \frac{A}{EI} = \frac{Wl_1^2}{2EI} \text{ radian}$$

$$y_B = \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{Wl_1^2}{2} \times \left(\frac{2l}{3} + (l - l_1)\right)}{EI}$$

$$= \frac{Wl_1^3}{3EI} + \frac{Wl_1^2}{2EI}(l - l_1)$$

Contoh soal 6.6 Batang kantilever dengan span 2,4 m mendapat beban terpusat sebesar 15 kN pada jarak 1,8 m dari ujung tetap. Berapakah harga kemiringan dan defleksi pada ujung bebas, jika rigiditas fleksural penampang batang 9×10^{12} N-mm².

Jawab:

Diketahui: $l = 2,4 \text{ m} = 2,4 \times 10^3 \text{ mm}$
 $l_1 = 1,8 \text{ m} = 1,8 \times 10^3 \text{ mm}$
 $W = 15 \text{ kN} = 15 \times 10^3 \text{ N}$
 $EI = 9 \times 10^{12} \text{ N-mm}^2$

Kemiringan pada ujung bebas

$$i_B = \frac{Wl_1^2}{2EI} = \frac{(15 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)^2}{2 \times (9 \times 10^{12})} = 0,0027 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas

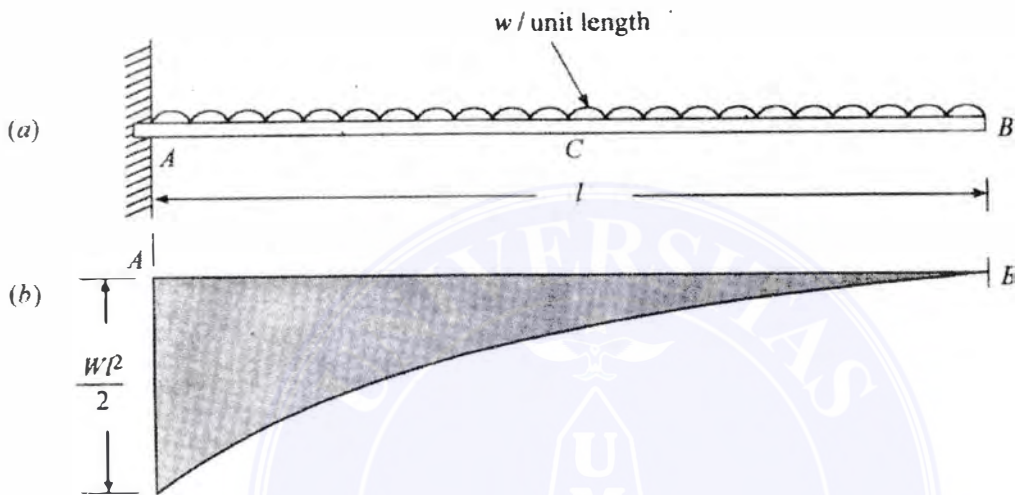
$$y_B = \frac{Wl_1^3}{3EI} + \frac{Wl_1^2}{2EI}(l - l_1)$$

$$= \frac{(15 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)^3}{3 \times (9 \times 10^{12})} + \frac{(15 \times 10^3) \times (1,8 \times 10^3)^2}{2 \times (9 \times 10^{12})}$$

$$\times [(2,4 \times 10^3) - (1,8 \times 10^3)]$$

$$= 3,2 + 1,6 = 4,8 \text{ mm}$$

6.8 Kantilever Dengan Beban Terdistribusi Merata



Gambar 6.8: Beban terdistribusi merata.

Misalkan batang tumpuan sederhana AB dengan panjang l mendapat beban terdistribusi merata w per satuan panjang seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.8 (a). Momen bending akan nol pada B dan akan menaik membentuk parabola hingga $\frac{wl^2}{2}$ pada A seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.8 (b).

Luas diagram momen bending:

$$A = \frac{wl^2}{2} \times l \times \frac{1}{3} = \frac{wl^3}{6}$$

dan jarak antara pusat gravitasi diagram momen bending dengan B :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{3l}{4} \\ i_B &= \frac{A}{EI} = \frac{wl^3}{6EI} \text{ radian} \\ y_B &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{wl^3}{6} \times \frac{3l}{4}}{EI} = \frac{wl^4}{8EI}\end{aligned}$$

Contoh soal 6.7 Batang kantilever dengan lebar 120 mm dan tinggi 150 mm mendapat beban terdistribusi merata sebesar 10 kN/m di keseluruhan panjangnya yaitu 2,4 m. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas. Ambil $E = 180$ GPa.

Jawab:

Diketahui: $b = 120 \text{ mm}$
 $d = 150 \text{ mm}$
 $w = 10 \text{ kN/m} = 10 \text{ N/m}$
 $E = 180 \text{ GPa} = 180 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$

Kemiringan pada ujung bebas

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{120(150)^3}{12} = 33,75 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

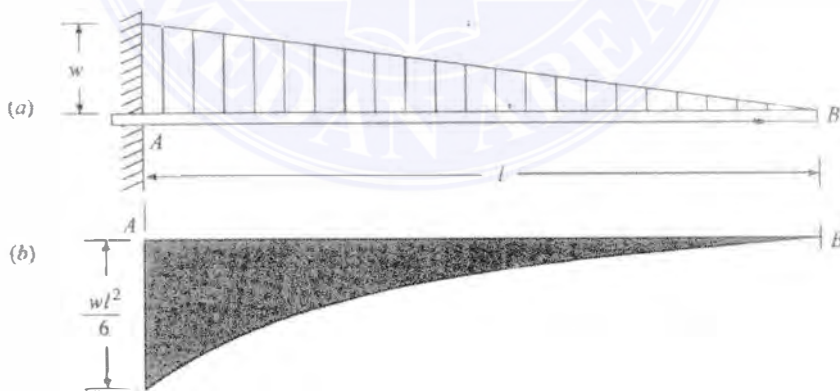
$$i_B = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{10 \times (2,4 \times 10^3)^3}{6 \times (180 \times 10^3) \times (33,75 \times 10^6)} = 0,0038 \text{ rad}$$

Defleksi pada ujung bebas

$$y_B = \frac{wl^4}{8EI}$$

$$= \frac{10 \times (2,4 \times 10^3)^4}{8 \times (180 \times 10^3) \times (33,75 \times 10^6)} = 6,83 \text{ mm}$$

6.9 Kantilever Dengan Beban Bervariasi Secara Gradual



Gambar 6.9:

Misalkan batang tumpuan sederhana AB dengan panjang l mendapat beban bervariasi secara gradual dari nol pada B hingga w persatuan panjang pada A seperti yang

6.9. KANTILEVER DENGAN BEBAN BERVARIASI SECARA GRADUAL 109

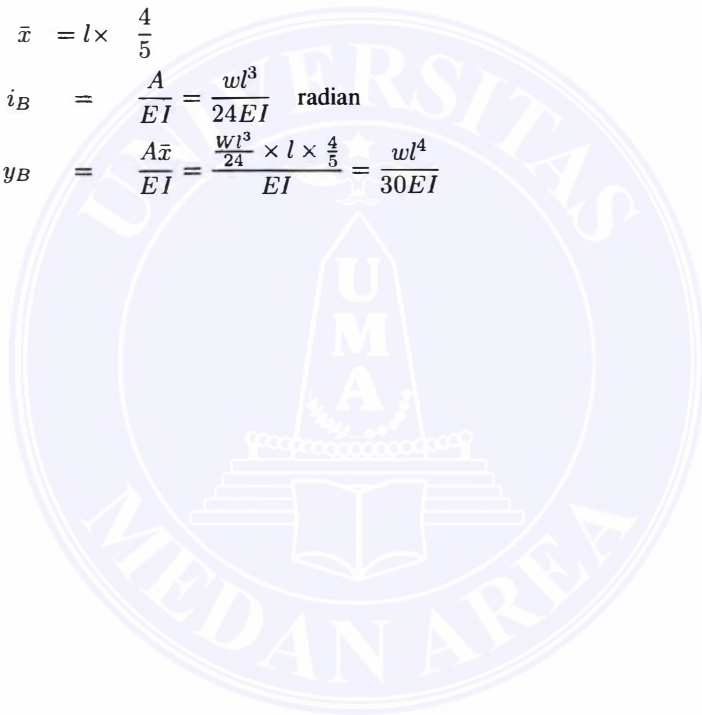
ditunjukkan oleh gambar 6.9 (a). Momen bending akan nol pada *B* dan menaik menurut parabola kubus hingga $\frac{wl^2}{6}$ seperti yang ditunjukkan oleh gambar 6.9 (b).

Luas diagram momen bending:

$$A = \frac{Wl^2}{6} \times l \times \frac{1}{4} = \frac{Wl^3}{24}$$

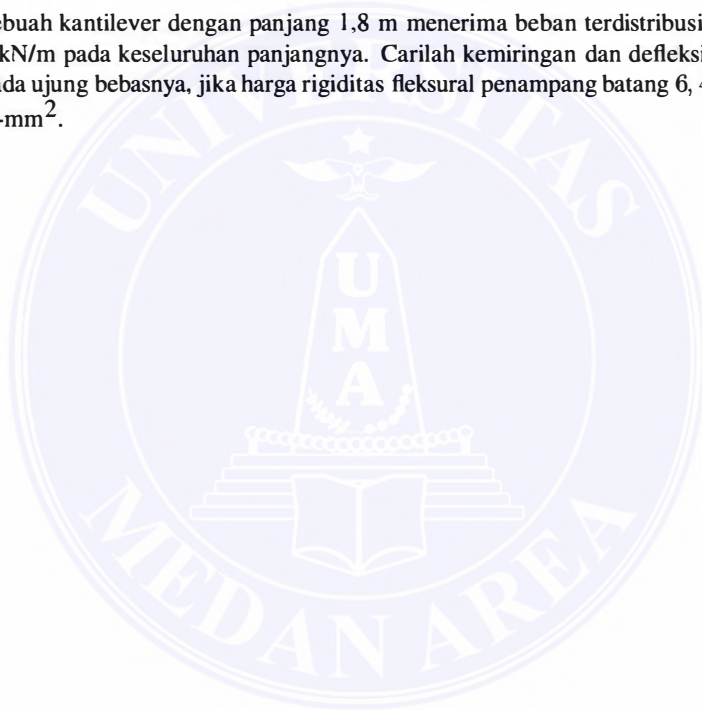
dan jarak antara pusat gravitasi diagram momen bending dengan *B*:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= l \times \frac{4}{5} \\ i_B &= \frac{A}{EI} = \frac{wl^3}{24EI} \text{ radian} \\ y_B &= \frac{A\bar{x}}{EI} = \frac{\frac{wl^3}{24} \times l \times \frac{4}{5}}{EI} = \frac{wl^4}{30EI}\end{aligned}$$



SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah kantilever dengan panjang 2,4 m menerima beban terpusat sebesar 37,5 kN pada ujung bebasnya. Carilah kemiringan dan defleksi dibawah beban. Ambil harga rigiditas fleksural penampang batang 20×10^{12} N-mm².
2. Sebuah kantilever dengan panjang 3 m menerima beban terpusat sebesar 20 kN pada jarak 1 m dari ujung bebasnya. Carilah kemiringan dan defleksi pada ujung bebas batang. Ambil $EI 8 \times 10^{12}$ N-mm².
3. Sebuah kantilever dengan panjang 1,8 m menerima beban terdistribusi merata 5 kN/m pada keseluruhan panjangnya. Carilah kemiringan dan defleksi batang pada ujung bebasnya, jika harga rigiditas fleksural penampang batang $6,4 \times 10^{12}$ N-mm².



DAFTAR PUSTAKA

1. RS. Khurmi, *Strength of Material*, S. Chand & Company Ltd., 2002.
2. Popov, *Mekanika Teknik*, Erlangga.
3. Timoshenko, *Teory of Elasticity*, McGraw Hill Book Co.

